BILANGAN KROMATIK GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

[1]Handrini Rahayuningtyas, [2]Abdussakir, [3]Achmad Nashichuddin

[1]Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
[2]jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
[3]jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Email: handrienie05@gmail.com

ABSTRAK

Graf *commuting* adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *noncommuting* adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$. Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak k warna pada titik sehingga dua titik yang terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf G adalah dua sisi yang berasal dari titik yang sama diberi warna yang berbeda. Bilangan terkecil k sehingga suatu graf dapat diberi k warna pada titik dan sisi inilah yang dinamakan bilangan kromatik. Pada artikel ini didapatkan rumus umum bilangan kromatik dari graf *commuting* dan *noncommuting* yang dibangun dari suatu grup yaitu grup dihedral.

Kata kunci: bilangan kromatik, pewarnaan titik, pewarnaan sisi, graf commuting dan noncommuting, grup dihedral.

ABSTRACT

Commuting graph is a graph that has a set of points X and two different vertices to be connected directly if each commutative in G. Let G non abelian group and $Z(G)$ is a center of G. Noncommuting graph is a graph which the the vertex is a set of $G\backslash Z(G)$ and two vertices x and y are adjacent if and only if $xy \neq yx$. The vertex colouring of G is giving k colour at the vertex, two vertices that are adjacent not given the same colour. Edge colouring of G is two edges that have common vertex are coloured with different colour. The smallest number k so that a graph can be coloured by assigning k colours to the vertex and edge called chromatic number. In this article, it is available the general formula of chromatic number of commuting and noncommuting graph of dihedral group.

Keywords*: chromatic number, vertex colouring, edge colouring, commuting and noncommuting graph, dihedral group.*

PENDAHULUAN

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf (p, q) [1].

Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ [2].

Perkembangan terbaru teori graf yaitu membahas graf yang dibangun oleh suatu grup. Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf *commuting* $C(G, X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Jadi, titik x dan y akan terhubung langsung di $C(G, X)$ jika dan hanya jika $xy = yx$ di G (Vahidi & Talebi, 2010:123). Sebaliknya, Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *noncommuting* Γ_G adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ [3].

Perkembangan berikutnya muncul bilangan kromatik pewarnaan titik dan pewarnaan sisi pada graf. Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada sisi sehingga dua sisi yang saling terkait langsung tidak diberi warna yang sama. Bilangan n terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan cara tersebut dinamakan bilangan kromatik. Bilangan kromatik titik ditulis $\chi(G)$ dan bilangan kromatik sisi ditulis $\chi'(G)$ [1].

KAJIAN TEORI

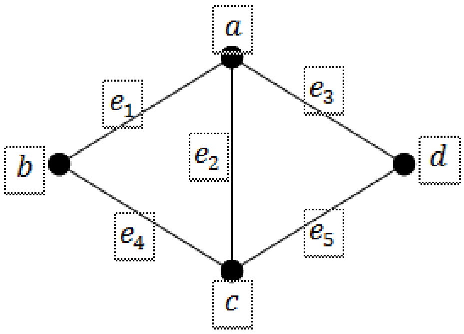
1. Graf *G*

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi* [1].

Sehingga jika $G = (V(G), E(G))$, maka $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, dimana $v_i \in V(G), i = 1,2,\dots,n$ disebut titik *(vertex)* dan $e_j = 1,2,\dots,m$ disebut sisi *(edge)*.

2. Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut ***lingkungan dari v*** dan ditulis $NG(v)$. ***Derajat dari titik v*** di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Derajat total G adalah jumlah derajat semua titik dalam G. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi *deg*(v) dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$ [2].



Gambar 1. Graf *G* dengan Himpunan Titik $V(G)$

Berdasarkan gambar, diperoleh bahwa:

$$N(a) = \{b, c, d\}$$
$$N(b) = \{a, c\}$$
$$N(c) = \{a, b, d\}$$
$$N(d) = \{a, c\}.$$

Dengan demikian, maka

$$\deg(a) = 3$$
$$\deg(b) = 2$$
$$\deg(c) = 3$$
$$\deg(d) = 2$$

3. Graf Terhubung

Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan u-v di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) [2].

4. Bilangan Kromatik

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada sisi sehingga dua sisi yang saling terkait langsung tidak diberi warna yang sama. Bilangan n terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan cara tersebut dinamakan bilangan kromatik. Bilangan kromatik titik ditulis $\chi(G)$ dan bilangan kromatik sisi ditulis $\chi'(G)$ [1].

5. Grup Dihedral

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) *= a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a)

Adapun grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ [4].

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikanD_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n [5].

Adapun himpunan anggota grup dihedral D_{2n} yaitu $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.

6. Graf *Commuting* dan *Noncommuting*

Misal G adalah grup berhingga dan X adalah subset dari G, graf commuting $C(G, X)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda di $C(G, X)$ terhubung langsung jika keduanya adalah elemen yang saling komutatif di G [6].

Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* Γ_G adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ [3].

PEMBAHASAN

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada sisi sehingga dua sisi yang saling terkait langsung tidak diberi warna yang sama. Dari pewarnaan titik dan sisi inilah dapat diketahui bilangan kromatiknya, baik graf *commuting* maupun graf *noncommuting.*

Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik dan Sisi Graf *Commuting* Grup Dihedral

Perhatikan tabel di bawah ini:

Tabel 1. Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik dan Sisi Graf *Commuting* Grup Dihedral

$C(D_{2n})$	$\chi(C(D_{2n}))$	$\chi'(C(D_{2n}))$
D_6	3	5
D_8	4	7
D_{10}	5	9
.	.	.
.	.	.
.	.	.
D_{2n}	n	$2n-1$

Sumber: penulis

Berdasarkan Tabel 1, didapatkan teorema berikut:

Teorema 1

Misal $C(D_{2n})$ adalah graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}). Maka bilangan kromatik pewarnaan titik graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}) adalah $\chi(C(D_{2n})) = n$.

Bukti:

Untuk n ganjil dan genap, misal diketahui $v = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Kemudian $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$ untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ di D_{2n}, maka r^i dan r^j saling terhubung langsung di $C(D_{2n})$. Karena r^i dan r^j saling komutatif, maka terdapat $(r^i, r^j) \in C(D_{2n})$ yang membentuk subgraf komplit-n. Sehingga dibutuhkan sebanyak n warna, atau dengan kata lain bilangan kromatik pewarnaan titik r^i dan r^j yaitu n.

Misal $w = \{s, sr, sr^1, \dots, sr^{n-1}\}$ dimana w hanya komutatif dengan 1 di D_{2n}. Artinya sr^i dan $sr^j, i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ tidak saling komutatif. Karena tidak saling komutatif, maka dapat diberi warna yang sama.

Pada n ganjil, sr^i tidak komutatif dengan $r^j, j = 1,2,\dots,n-1$.

$$sr \circ r = sr^{1+1} = sr^2 \qquad r \circ sr = sr^{1-1} = s$$

Karena sr^i tidak komutatif dengan $r^j, j = 1,2,\dots,n-1$, maka warna titik sr^i berlaku sama dengan titik $r^j, j = 1,2,\dots,n-1$.

Pada n genap, terdapat $sr^{\frac{n}{2}} \circ r^{\frac{n}{2}} = r^{\frac{n}{2}} \circ sr^{\frac{n}{2}}$, sehingga warna titik $sr^{\frac{n}{2}}$ tidak boleh sama dengan $r^{\frac{n}{2}}$. Selain itu, terdapat $sr^{\frac{n}{2}} \circ r^i = r^i \circ sr^{\frac{n}{2}}$, sehingga warna titik $sr^{\frac{n}{2}}$ boleh sama dengan warna titik r^i, atau dengan kata lain $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ dapat diberi warna yaitu memilih dari $\frac{n}{2}$ warna. Jadi, diperoleh $\chi(C(D_{2n})) = n$, untuk n ganjil maupun genap.

Teorema 2

Misal $C(D_{2n})$ adalah graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}). Maka bilangan kromatik pewarnaan sisi graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}) adalah $\chi'(C(D_{2n})) = 2n-1$

Bukti:

Untuk n ganjil, diketahui bahwa $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Di samping itu, 1 komutatif dengan semua elemen r^i dan sr^i, sehingga 1 terhubung langsung dengan semua elemen r^i dan $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ di G. Karena 1 terhubung langsung dengan $2n-1$ elemen di G, maka minimal warna yang digunakan pewarnaan sisinya yaitu sebanyak $2n-1$ warna. Berdasarkan aturan pewarnaannya, setiap sisi yang terkait dengan 1 titik yang sama diberi warna yang berbeda. Adapun r^i dan $r^j, i = 0,1,2,\dots,2n-1$ yang saling terhubung langsung dapat diberi warna dari $2n-1$ warna yang telah digunakan sebelumnya. Sehingga didapatkan bilangan kromatik sisinya yaitu $\chi'(C(D_{2n})) = 2n-1$, untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui bahwa Untuk n ganjil, diketahui bahwa $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Walaupun $r^{\frac{n}{2}}$

komutatif dengan $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$, tetapi $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ tidak komutatif dengan r^j untuk j selain $\frac{n}{2}$. Elemen 1 komutatif dengan r^i dan $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ yaitu sebanyak $2n-1$ elemen. Karena 1 komutatif dengan semua elemen r^i dan $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ yaitu sebanyak $2n-1$ elemen, maka 1 memiliki derajat tertinggi di G. Artinya, minimal warna yang dibutuhkan adalah sebesar derajat tertinggi di G yaitu 1. 1 terhubung langsung dengan $2n-1$ elemen, maka minimal warna yang digunakan dalam pewarnaan sisi di G sebanyak $2n-1$ warna. Jadi, diperoleh bilangan kromatik sisinya yaitu $\chi'(C(D_{2n})) = 2n-1$, untuk n genap.

Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik dan Sisi Graf *Noncommuting* Grup Dihedral

Perhatikan tabel berikut:

Tabel 2. Bilangan Kromatik Graf *Noncommuting* Graf *Noncommuting* Grup Dihedral

$\Gamma(D_{2n})$	$\chi(\Gamma(D_{2n}))$	$\chi'(\Gamma(D_{2n}))$
$\Gamma(D_6)$	4	5
$\Gamma(D_8)$	3	5
$\Gamma(D_{10})$	6	9
$\Gamma(D_{12})$	4	9
$\Gamma(D_{14})$	8	13
$\Gamma(D_{16})$	5	13
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\Gamma(D_{2n})$	$n+1, n$ ganjil $\frac{n}{2}+1, n$ genap	$2n-1$, n ganjil $2n-3$, n genap

Sumber: penulis

Berdasarkan Tabel 2, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3

Misal $\Gamma(D_{2n})$ adalah graf *noncommuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}), maka bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-2n (D_{2n}) adalah $\chi(\Gamma(D_{2n})) = n+1$ untuk n ganjil dan $\chi(\Gamma(D_{2n})) = \frac{n}{2}+1$ untuk n genap.

Bukti:

Untuk n ganjil, diperoleh himpunan $S = \{r, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ saling tidak komutatif di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Dapat dikatakan bahwa r^i dan sr^j, untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ saling terhubung langsung. Dengan demikian, $S = \{r, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ akan membentuk subgraf komplit terbesar di G. Karena $S = \{r, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ membentuk subgraf terbesar di G, maka bilangan clique atau order subgraf komplit terbesar graf G adalah $n+1$, yaitu kardinalitas himpunan S. Karena order dari subgraf komplit terbesarnya adalah $n+1$, maka pewarnaan titik pada graf G membutuhkan minimal warna sebanyak $n+1$ warna. Dengan demikian didapatkan bilangan kromatik titik pada graf *noncommuting* grup dihedral yaitu $\chi(\Gamma(D_{2n})) = n+1$, untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui bahwa $Z(G) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$. Karena r^i dan sr^j, untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ tidak saling komutatif, maka r^i dan sr^j, untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ terhubung langsung di G, untuk $i \neq j$. Karena $sr^i, i = 0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ saling komutatif dengan $sr^j, j = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$, maka sr^i tidak terhubung langsung dengan sr^j. Namun demikian, $sr^i, i = 0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ tidak komutatif satu sama lain. Maka $sr^i, i = 0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ akan membentuk subgraf komplit. Karena $sr^i, i = 0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ terhubung langsung dengan r, maka diperoleh subgraf komplit terbesar yang memuat $\frac{n}{2}+1$ titik. Dengan kata lain, bilangan clique atau order subgraf komplit terbesar graf G adalah $\frac{n}{2}+1$. Karena order dari subgraf komplit terbesar G adalah $\frac{n}{2}+1$, maka pewarnaan titik pada graf G membutuhkan minimal warna sebanyak $\frac{n}{2}+1$ warna. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik titik graf *noncommuting* grup dihedral yaitu $\chi(\Gamma(D_{2n})) = \frac{n}{2}+1$, untuk n genap.

Teorema 4

Misal $\Gamma(D_{2n})$ adalah graf *noncommuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}), maka bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-$2n$ (D_{2n}) adalah $\chi'(\Gamma(D_{2n})) = 2n-1$ untuk n ganjil dan $\chi'(\Gamma(D_{2n})) = 2n-3$ untuk n genap.

Bukti:

Untuk n ganjil, diketahui r^i dan $sr^j, i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ tidak komutatif, artinya r^i dan $sr^j, i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ saling terhubung langsung di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Karena r^i dan sr^j saling terhubung langsung, maka membentuk subgraf komplit di $\Gamma(D_{2n})$. Misal v merupakan titik di $\Gamma(D_{2n})$. Diketahui bahwa banyaknya titik berderajat ganjil pada sebuah graf adalah genap, dapat ditulis $\sum_{v\in\Gamma(D_{2n})} deg(v) = 2n$. Pada graf *noncommuting*, pada n ganjil banyaknya

$\sum(Z(D_{2n}))$ adalah 1. Karena pada graf *noncommuting* center grup tidak dimunculkan, maka dapat ditulis

$$D(\Gamma(D_{2n})) = \sum_{v\in\Gamma(D_{2n})} \deg(v) - \sum(Z(D_{2n}))$$
$$= 2n - 1.$$

Dengan demikian, minimum warna yang digunakan yaitu $2n-1$. Sehingga didapatkan $(\Gamma(D_{2n})) = 2n - 1$ untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui r^i dan $sr^j, i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ tidak saling komutatif, maka r^i dan $sr^j, i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ terhubung langsung di $\Gamma(D_{2n})$, $i \neq j$. Diketahui bahwa banyaknya derajat titik pada sebuah graf adalah dua kali banyak sisi. Misal v merupakan titik di $\Gamma(D_{2n})$, maka dapat ditulis $\sum_{v\in\Gamma(D_{2n})} deg(v) = 2n$. Diketahui pada graf *noncommuting* $Z(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$, maka $\sum(Z(D_{2n})) = 2$. Dari banyaknya titik dan center grup di $\Gamma(D_{2n})$, dapat dikatakan $D(\Gamma(D_{2n})) = 2n - 2$. Karena $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ saling komutatif dengan $sr^j, j = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$, maka $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ tidak terhubung langsung dengan $sr^j, j = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$, sehingga $D(\Gamma(D_{2n})) = 2n - 3$. Karena $D(\Gamma(D_{2n})) = |N(v \in D_{2n})|$ yaitu $2n-3$, maka dapat dikatakan minimal warna yang digunakan sebanyak $2n-3$ warna. Dengan demikian $(\Gamma(D_{2n})) = 2n - 3$ untuk n genap.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan mengenai bilangan kromatik graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral yaitu sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral yaitu $\chi(C(D_{2n})) = n$, untuk n ganjil dan genap.
2. Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral ialah $\chi'(\mathrm{C}(D_{2n})) = 2n - 1$, untuk n ganjil dan genap.
3. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral ialah:
$$\chi(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} n+1, & n\ ganjil \\ \frac{n}{2}+1, & n\ genap \end{cases}$$
4. Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral ialah:
$$\chi'(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} 2n-1, & n\ ganjil \\ 2n-3, & n\ genap \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] G. Chartrand and L. Lesniak, Graph and Digraph 2nd Edition, California: Wadsworth, Inc, 1986.

[2] Abdussakir, N. Azizah and F. Novandika, Teori Graf, Malang: UIN Malang Press, 2009.

[3] A. Abdollahi, S. Akbari and H. Maimani, "Noncommuting Graph of a Group," *Journal of Algebra,* pp. 468-492, 2006.

[4] M. Raisinghania and R. Aggrawal, Modern Algebra, New Delhi: S. Chand & Company Ltd, 1980.

[5] D. Dummit and R. Foote, Abstract Algebra, New Jersey: Prentice Hall, Inc, 1991.

[6] A. Nawawi and Preeley, On Commuting Graphs for Element of Order 3 in Symetry Groups, Manchester: The Mims Secretary, 2012.

[7] A. G. Parlos, "Linearization Of Nonlinear Dynamics," 2014. [Online]. Available: http://parlos.tamu.edu/MEEN651/Linearization.pdf. [Accessed 17 Agustus 2014].

[8] R. C. Robinson, An Introduction Dynamical System Continuous and Discrete, New Jersey: Pearson Education, 2004.

[9] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, New York: John Wiley & Sons, Inc, 2009.

[10] R. O. Kwofie, "A mathematical model of a suspension bridge – case study: Adomi bridge, Atimpoku, Ghana," *Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology, and Innovation,* vol. 1(3), pp. 047-062, 2012.

[11] G. Vries, T. Hillen, M. Lewis, J. Müller and M. Schönfisch, A Course in Mathematical Biology: Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods, Alberta: SIAM, 2006.

[12] M. Bulmer and J. Eccleston, Photocopier Reliability Modeling Using Evolutianary Algorithm., John Wiley & Sons, 2003.

[13] P. Bhattacharya and R. Bhattacharjee, "A Study on Weibull Distribution for Estimating the Parameters," *Journal of Applied Quantitative Methods,* vol. 2, p. 5, 2010.

[14] I. P. Kinasih, "Penaksiran Parameter Distribusi Weibull Bivariat Menggunakan Algoritma Genetika," *Tesis,* 2012.

[15] R. d. S. D. Bartle, Introduction to Real Analysis, 3rd edition, New York: JohnWiley,

2000.
[16] J. D. T. L. Lindenstrauss, Classical Banach Spaces II, Berlin: Springer-Verlag, 1977.
[17] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, New York: Springer-Verlag, 1984.
[18] P. Meyer-Nieberg, Banach Lattices, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
[19] F. d. K. N. Albiac, Topics in Banach Space Theory, New York: Springer-Verlag, 2006.
[20] J. Yeh, Real Analysis: Theory of Measure and Integration, 2nd edition, Singapore: World Scientific Publishing, 2006.
[21] H. Dales, Introduction Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
[22] S. Darmawijaya, "Calculus on the Family of Continuous Functions," in *Seminar Nasional KNM XVI*, Universitas Padjadjaran Sumedang, 2012.
[23] F. Chorlton, Textbook of fluid dynamics, Princeton: D. Van Nostrand Company LTD, 1967.
[24] B. R. Munson, Fundamentals of fluid mechanics, John Wiley and Sons, Inc, 2002.
[25] R. M. Olson, Dasar-dasar mekanika fluida, Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama, 1993.
[26] B. K. Shivamoggi, Theoretical fluid dynamics, Boston: Martinus Nijhoff Publisher, 1985.
[27] L. Wiryanto, "A Solitary-like wave generated by flow passing a bump," in *ICMSA 2010*, Kuala Lumpur, 2010.
[28] T. Akylas, "On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution," *J. Fluid Mech,* pp. 455-466, 1984.
[29] S. Cole, "Transient Waves Produces By Flow Past a Bump," *Wave Motion,* pp. 579-587, 1985.
[30] R. P. C. Steven C. Chapra, Numerical Methods for Engineers, Boston: Mc Graw Hill.
[31] R. L. Burden, Numerical Analysis, Boston: Brooks/Cole CENGAGE Learning, 2011.
[32] L. Lapidus, Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, Canada: John Wiley & Sons, 1982.
[33] Z. D.-H. R.H.J. Grimshaw, "Generation of solitary waves by transcritical flow over a step," *J. Fluid Mech,* pp. 235-254, 2007.
[34] B. -F. F. a. T. Mitsui, "A finite Difference Method for KdV and KP equations," *J. Comp. Applied Maths., ,* pp. 95-116, 1998.
[35] P. D. &. R. S. Johnson, Solitons: an introduction, Britain: Cambridge university press, 1993.
[36] F. E. Camfield, Tsunami Engineering, Belvoir USA: Coastal Engineering Research Center, 1980.
[37] J. Park, "Numerical Simulation of Wave Propagation using the Shallow Water Equation," Harvey Mudd College, 2007.
[38] L. H. Holthuijsen, Waves in Oceanic and Coastal Waters, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
[39] K. Satake, Tsunamis: Case Studies and Recent Development, Netherland: Springer, 2005.
[40] J. Kampf, Ocean Modelling for Beginners, New York: Springer, 2009.