	всеовщии закон негиодичности
<b>Кузьменко А.Г.</b> Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий, Украина	КАТАСТРОФ В НЕЛИНЕЙНЫХ
	ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.
	ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНОСТЬ СИСТЕМ –
	СЛЕЛСТВИЕ ИХ НЕОЛНОРОЛНОСТИ

Окружающая нас материя статистически неоднородна, а процессы, протекающие в материи нелинейные. Это в значительной мере относится к конструкционным материалам, из которых изготавливаются машины и другие изделия.

В данной работе развивается мысль о том, что одной из главных причин нелинейности процессов деформирования и изнашивания является статистическая неоднородность свойств материалов и их поверхностей. Здесь доказывается, что нелинейность процессов деформирования и изнашивания есть следствие статистической неоднородности структуры материала.

## 1. Механика пластического деформирования

# 1.1. Детерминированная модель

1<sup>0</sup>. Представим себе один макро образец, состоящий из системы одинаково деформируемых микро стержней. Это простейшая структурная модель сплошной среды. Примем, что каждый из стержней обладает свойствами идеального упруго-пластического материала с одним и тем же модулем упругости, но разными пределами текучести.

Напряженно-деформированное состояние статистически неопределимой системы стержней описывается следующими соотношениями [1]:

1) условие равновесия:

$$Q = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k s_k = \sigma s; \qquad s = \sum s_k ; \qquad (1.1.1)$$

регорний элион периониности

или

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{s} \sum \boldsymbol{\sigma}_{k} \boldsymbol{s}_{k} = \sum \boldsymbol{\sigma}_{k} \boldsymbol{g}_{k} = < \boldsymbol{\sigma}_{k} >, \qquad (1.1.2)$$

где  $\sigma_k$ ,  $s_k$  – напряжение и площадь сечения k - го стержня;

 $\sigma$  – среднее напряженное в макро - стержне при его общем сечении *s* ;

N — число микро – стержней;

 $g = s_k / s$  – весовые коэффициенты;

 $< \sigma_k > -$  осреднение;

2) условие совместимости деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k} = \boldsymbol{\varepsilon}, \, k = 1, \, N \,, \tag{1.1.3}$$

где  $\varepsilon_{k}$  – текущая деформация в k – ом стержне;

є – средняя деформация макро-стержня;

3) физические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= r_k + p_k, \quad r_k = \frac{\sigma_k}{E}, \\ p_k &\geq 0 \quad \text{при} \quad \sigma_k = \sigma_T^k \\ p_k &\leq 0 \quad \text{при} \quad \sigma_k = -\sigma_T^k \end{bmatrix}, \tag{1.1.6}$$

где  $r_k$ ,  $p_k$  – упругая и пластическая составляющие деформации;

Е – модуль упругости материала;

*p*<sub>*k*</sub> – скорость пластической деформации.

2<sup>0</sup>. Дальнейшее рассмотрение для наглядности выполним на примере системы, состоящей из трех стержней (рис. 1) с разными пределами текучести:

$$\sigma_T^2 = 3\sigma_T^1, \qquad \sigma_T^3 = 9\sigma_T^1.$$

Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2012, № 3



Рис. 1 – Схема нагружения (а) и диаграммы растяжения микро-стержней (б)

Весовые коэффициенты  $g_1 = 0, 6; g_2 = 0, 3; g_3 = 0, 1.$ 

Теперь представим себе процесс деформирования этой системы из трех стержней. Диаграмма процесса будет состоять из трех участков (рис. 2).



Рис. 2 – Диаграмма деформирования системы трех стержней

На первом участке все стержни деформируются упруго, деформации и напряжения в них одинаковы:

$$\sigma_{k} = E\varepsilon_{k}$$

$$\sigma = \langle \sigma_{k} \rangle = \langle E\varepsilon \rangle = E\varepsilon \langle 1 \rangle = E\varepsilon = \sigma^{k}$$

$$\left( \langle 1 \rangle = \sum_{k}^{N} g_{k} = 1 \right)$$

$$(1.1.7)$$

*Переход* от участка I к участку II происходит при появлении текучести в первом стержне:  $\epsilon = \sigma_T^l / E$ .

Приращение напряжений  $\delta_{\sigma}$  и деформаций  $\delta_{\epsilon}$  на втором участке принимают значения:

$$\delta \sigma = < \delta \sigma_k > = \sum_{k=2}^{3} \delta \sigma^k g_k = E \delta \varepsilon (g_2 + g_1) = E \delta \varepsilon (1 - g_1) = 0, 4E \delta \varepsilon.$$

Следовательно, на втором участке появляется модуль упрочнения равный:

$$E_T^{II} = E(1-g_1) = 0, 4E$$
.

*Переход* оси второго участка к третьему происходит при достижении предела текучести во втором стержне, при этом:

$$\delta \sigma = < \delta \sigma^k > = \delta \sigma_3 g_3 = E \delta \varepsilon_3 g_3 = E \delta \varepsilon (1 - g_1 - g_2) = 0, 1E \delta \varepsilon.$$

Модуль упрочнения на этом III участке:

Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2012, № 3

$$E_T^{III} = \frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E(1 - g_1 - g_2) = 0, 1E.$$

Равновесие системы наступает при достижении предела текучести в третьем стержне:

$$\varepsilon = \sigma_T^3 / E,$$

при этом в системе возникают предельные напряжения:

$$\sigma_e = <\sigma_T^k > = \sum_{k=1}^N \sigma_T^k g_k , \qquad (1.1.8)$$

при этом:

$$\sigma_B = \sigma_T^1 (g_1 \sigma_T^1 + g_2 \sigma_T^2 + g_3 \sigma_T^3) = \sigma_T^1 (1 \cdot 0, 6 + 3 \cdot 0, 3 + 9 \cdot 0, 1) = 2, 4\sigma_T^1.$$

В дальнейшем удобно пользоваться безразмерным коэффициентом:

$$z_k = \mathbf{\sigma}_T^k / \mathbf{\sigma}_B \,. \tag{1.1.9}$$

В результате рассмотрения трехстержневой системы мы получим кусочно-линейную диаграмму растяжения макростержня.

При неограниченном увеличении числа микростержней при соответственном уменьшении их сечений кусочно-линейная функция стремится к монотонной нелинейной функции.

# 1.2. Случайное распределение пределов текучести

 $1^{0}$ . Распределение пределов текучести может быть представлено в виде функции плотности распределения вероятностей предела текучести  $y = y(z) = y(\sigma_{T}^{k})$ . При этом y(a)dz есть относительное число микроэлементов (аналог, ранее использовавшийся весовой характеристики) со значением z в интервале a < z < a + dz. В этом случае формула осреднения (1.1.2) принимает вид [2]:

$$\sigma = \langle \mathcal{B} \rangle = \int_{0}^{\infty} \mathcal{B}(z) y(z) dz = \int_{0}^{1} \mathcal{B}(z) dP(z) , \qquad (1.2.1)$$

где dP(z) – интегральное распределение:

$$P(z) = \int_{0}^{z} y(x) dx,$$
 (1.2.2)

или

$$f(z) = \int_{0}^{z} [1 - P(x)] dx. \qquad (1.2.3)$$

По смыслу P(a) – относительный вес микроэлементов, у которых значение параметра z не превышает заданного значения a.

 $2^{0}$ . Между функцией плотности распределения вероятностей безразмерного предела текучести f(z):

$$z = E\varepsilon / \sigma_B$$
,

и функцией диаграммы деформирования в соответствии с рассматриваемой моделью существует однозначная связь.

При некоторой деформации одна группа (II) элементов работает за пределами текучести, другая группа элементов работает в упругой области. На графиках (рис. 3) граница обозначена  $z_*$ :

$$z_* = E\varepsilon / \sigma_B. \tag{1.2.4}$$

Используя формулу осреднения (1.2.1), получаем:

$$E_{T} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \int_{P(z^{*})}^{1} EdP(z) = E[1 - P(z^{*})] = E\left[1 - P\left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_{B}}\right)\right]. \quad (1.2.5)$$

Интегрируя последнее выражение по деформации, получаем уравнение кривой деформирования моделируемого материала:

$$\sigma = \int E_1 d\varepsilon = \sigma_B \int_{\sigma}^{E\varepsilon/\sigma_B} [1 - P(\alpha)] d\alpha = \sigma_B f(E\varepsilon/\sigma_B).$$
(1.2.6)

Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2012, № 3



Рис. 3 – Функция распределения вероятностей пределов текучести (а); и функция диаграммы напряжений и пределов текучести (б)

Разделив левую и правую части на *E*, имеем ( $\sigma / E = r$ ):

$$r = F(\varepsilon) = \frac{\sigma_{e}}{E} f(E\varepsilon/\sigma_{e}). \qquad (1.2.7)$$

С одной стороны это диаграмма деформирования  $E(\varepsilon)$ , а с другой в нее входит функция f(z) – распределение параметров z (пределов текучести). Коэффициент подобия равен:

$$r_{e} = \sigma_{e} / E . \tag{1.2.8}$$

Существование простой связи между кривой деформирования  $\sigma = EF(\varepsilon)$  и функцией f(z) значительно упрощает идентификацию модели (ее отождествление с конкретным материалом). Получив из опыта диаграмму деформирования  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , следует:

1) представив ее в виде функции  $r = F(\varepsilon)$ , разделив все ординаты на модуль E;

2) найти максимальное значение ординаты – величины  $r_{e}$ ;

3) разделить все абсциссы и ординаты на эту величину.

В результате получаем функцию f(z), характеризующую в соотношениях структурной модели микронеоднородность моделируемого материала:

$$f(z) = \frac{E}{\sigma_s} F(\varepsilon).$$
(1.2.9)

Таким образом, материал характеризуется двумя координатами E и  $\sigma_s$  и одной функцией f(z), получаемой из опыта. Интегральная функция распределения пределов текучести определяются по зависимости, следующей из выражения (1.2.3):

$$P(z) = 1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z}.$$
(1.2.10)

Плотность распределения:

$$y(z) - \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}.$$
 (1.2.11)

## 1.3. Определение параметров распределения по диаграмме деформирования

Этот подход впервые рассмотрен в 1953 г. Афанасьевым Н.Н. в книге [2].

Пусть y(z) – кривая частостей пределов текучести. Если все зерна получают удлинение  $\varepsilon = \sigma / E$ , то напряжение, действующее в отдельных зернах, будет изменяться согласно рис. 4.



Рис. 4 - Связь диаграммы и распределения

Действительно группы зерен, соответствующие кривой частот и лежащие правее AB, получают удлинение >  $z_* / E$ ,  $z_*$  – их предел текучести, поэтому они несут напряжение, равное их пределу текучести. Зерна левее AB нагружены ниже своего предела текучести, поэтому действующее в них напряжения будет  $\sigma = \varepsilon E$ . Среднее напряжение образца:

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle = \frac{\int_{0}^{\sigma} y(z)zdz + \boldsymbol{\sigma} \int_{\sigma}^{\infty} y(z)dz}{\int_{0}^{\infty} y(z)dz}, \qquad (1.3.1)$$

или, принимая путем выбора параметров уравнения:

$$\int_{0} y(z) dz = 1$$

получаем:

$$\langle \sigma \rangle = \int_{0}^{\sigma} y(z)zdz + \sigma \int_{\sigma}^{\infty} y(z)dz$$
, (1.3.2)

или при  $\sigma = E\varepsilon$ ,

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \int_{0}^{E_{\varepsilon}} y(z)zdz + E\varepsilon \int_{\sigma}^{\infty} y(z)dz$$
 (1.3.3)

Дифференцируя дважды выражение (1.3.3) по  $d\epsilon$ , имеем:

$$\frac{\partial \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = Ey(E\boldsymbol{\varepsilon})E\boldsymbol{\varepsilon} + E \int_{E\boldsymbol{\varepsilon}}^{\infty} e(z)dz - E\boldsymbol{\varepsilon} \cdot Ey(E\boldsymbol{\varepsilon}),$$
$$\frac{\partial^2 \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} = -E^2 y(E\boldsymbol{\varepsilon}),$$
$$y(z) = \frac{-1}{E^2} \frac{\partial^2 \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}.$$
(1.3.4)

или

Таким образом, уравнение частостей распределения пределов текучести в зернах является второй производной от уравнения кривой диаграммы растяжения.

Теперь найдем связь интегральной функции распределения и диаграммы деформирования. Интегрируя выражение (1.3.2) по частям, имеем:

$$\left\langle \sigma \right\rangle = \int_{0}^{\sigma} y(z)zdz + \sigma \int_{\sigma}^{\infty} y(z)dz = z \left|_{0}^{\sigma} y(z)dz \right|_{0}^{\sigma} - \int_{0}^{\sigma} y(z)dz + \sigma \int_{\sigma}^{\infty} y(z)dz,$$

Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2012, № 3

$$\langle \sigma \rangle = \sigma - \int_{0}^{\sigma} P(z) dz$$
, (1.3.5)

где

$$P(z) = \int y(z)dz \,. \tag{1.3.6}$$

Интегральная функция распределения:

$$\frac{d\left\langle \mathbf{\sigma}\right\rangle}{d\varepsilon} = 1 - P(\mathbf{\sigma})$$

или

$$\frac{d\langle \sigma \rangle}{d\varepsilon} = E[1 - P(E\varepsilon)], \qquad (1.3.7)$$

$$P(E\varepsilon) = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\langle \sigma \rangle}{d\varepsilon}.$$
 (1.3.8)



Рис. 5 – Схема построения функции распределения

Таким образом, для получения интегральной функции распределения по диаграмме деформирования необходимо:

- 1) построить диаграмму деформирования: (рис. 5, а, 5, б);
- 2) построить диаграмму производных по є (рис. 5, в);

Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2012, № 3

3) разделить на E все ординаты;

4) пронормировать диаграмму производных, разделив все ординаты на  $\sigma_{max}$ ;

5) построить интегральную функцию распределения по зависимости (1.3.8), вычтя из единицы функцию п. 4) (рис. 5, г);

6) продифференцировать интегральную функцию и получить плотность распределения вероятностей предела текучести микроэлементов (рис. 5, д).

Заметим, что при практическом определении параметров функции плотности распределения вероятностей предела текучести необходимо выполнять основное требование, предъявляемое к функциям плотности распределения:

$$\int_{\infty}^{\infty} y(z)dz = 1.$$
 (1.3.9)

При аналитическом определении параметров распределения условие (1.3.9) рассматривается совместно с описанной выше процедурой.

## 2. Изнашивание неоднородной поверхности

## 2.1. Детерминированная модель

1<sup>0</sup>. Приработка в узлах трения – сложный процесс самоорганизации в сопряжениях. Общий механизм этого процесса складывается из целого ряда простых механизмов. Среди них наиболее изученными являются: 1) рельефная приспосабливаемость – выравнивание неровностей до равновесного состояния; 2) структурная приспосабливаемость – изменение структуры к менее энергоемкой; 3) выравнивание распределения давлений; 4) возникновение благоприятного режима смазывания; 5) переходный процесс окисления и восстановления до достижения стабильного уровня и др.

Очевидно, что одним из главных направлений развития трибологии в ближайшие годы будет изучение и моделирование процессов самоорганизации при трении и износе. Среди базовых вопросов в этом изучении является разработка принципов построения иерархии моделей, так как каждая модель более высокого уровня в иерархии представляет собой упорядочение, самоорганизацию.

2<sup>0</sup>. В качестве простейшего примера рассмотрим образец, состоящий из трех стержней. Пусть зависимость интенсивности весового износа стержня от времени имеет вид кусочно-линейной функции, график которой представлен на рис. 6. Уравнение имеет вид:





$$\begin{cases} I_{gk} = \frac{(I_{gk}^{c} - I_{gk}^{H})}{\tau_{ck}} \tau + I_{gk}^{H}, & \text{при } \tau < \tau_{ck} \\ I_{gk} = I_{gk}^{c}, & \text{при } \tau > \tau_{ck} \end{cases},$$
(2.1.1)

где  $I_{gk}^{H}$  – начальная интенсивность весового износа k – го стержня;

 $I_{gk}^{c}$  – интенсивность весового износа k – го стержня, соответствующая периоду установившегося изнашивания (стационарная интенсивность изнашивания);

τ<sub>*ck*</sub> – длительность периода при работки.

Полагаем следующие соотношения:

$$I_{gk}^{H} = \text{const}, \quad \frac{I_{gk}^{c} - I_{gk}^{H}}{\tau_{ck}t} = k_{0} = \text{const}, \ c, \ k = \overline{1, 3},$$
 (2.1.2)

т.е. будем считать, что неоднородность триботехнических свойств стержней характеризуется лишь различием стационарных интенсивностей изнашивания или, то же самое, периодов приработки.

Пусть в рассмотренном примере:  $I_{g1}^c = 3I_{g3}^c$ ,  $I_{g1}^c = 2I_{g2}^c$ , где  $I_{g1}^c$ ,  $I_{g2}^c$ ,  $I_{g3}^c$  – стационарные интенсивности изнашивания 1-го, 2-го, 3-го стержней соответственно:  $g_1 = A_{\alpha 1} / A_{\alpha} = 0, 2$ ,  $g_2 = A_{\alpha 2} / A_{\alpha} = 0, 5$ ,  $g_3 = A_{\alpha 3} / A_{\alpha} = 0, 3$ , где  $A_{\alpha 1}$ ,  $A_{\alpha 2}$ ,  $A_{\alpha 3}$ ,  $A_{\alpha}$  – номинальные площади контакта 1-го, 2-го, 3-го стержней и образца в целом соответственно.

На первом этапе (в период времени  $\tau < \tau_{c1}$ ) интенсивность изнашивания образца изменится на величину  $\delta I_g$  при изменении времени на величину  $\delta \tau : \delta I_g = k_0 \delta \tau$ ; тангенс угла наклона интенсивности изнашивания на первом участке  $k = \delta I_g / \delta \tau = k_0$ .



Рис. 7 – Зависимость от времени величины интенсивности весового износа 1, 2, 3 - го стержней

Рис. 8 – Зависимость от времени интенсивности изнашивания образца, состоящего из трех элементов

В момент времени  $\tau = \tau_{c1}$  в первом стержне заканчивается период приработки и начинается период установившегося изнашивания при этом имеем следующие соотношения:

$$I_{g1} = I_{g1}^c = \text{const}, \qquad \delta I = 0$$

На втором этапе  $(\tau_{c1} < \tau < \tau_{c2})$ ,  $\delta I_g = 0, 8k_0 \delta \tau$ ,  $k = 0, 8k_0$ ,  $I_g = I_{g1}^c = 3I_{g3}^c$ . В момент времени  $\tau = \tau_{c2}$ ,  $I_{g1} = I_{g1}^c = \text{const}$ ,  $I_{g2} = I_{g2}^c = \text{const}$ ,  $\delta I_{g1} = \delta I_{g2} = 0$ .

На третьем этапе ( $\tau_{c2} < \tau < \tau_{c3}$ ),  $\delta I_g = 0, 3k_0 \delta \tau$ ,  $k = 0, 3k_0$ ,  $I_g = 0, 73I_{g1}^c = 2, 2I_{g3}^c$ . В момент времени  $\tau = \tau_{c3}$ ,  $I_{g1} = I_{g1}^c = \text{const}$ ,  $I_{g2} = I_{g2}^c = \text{const}$ ,  $I_{g3} = I_{g3}^c = \text{const}$ ,  $\delta I_{g1} = \delta I_{g2} = \delta I_{g3} = 0$ .

На четвертом этапе ( $\tau > \tau_{c3}$ ),  $\delta I_g = 0$ , k = 0,  $I_g = 0,63I_{g1}^c = 1,9I_{g3}^c$ .

Зависимость интенсивности изнашивания образца, состоящего из трех стержней, представлена на рис. 8.

В качественном отношении полученная зависимость интенсивности изнашивания образца, представленного в виде системы стержней (рис. 17.8), соответствует реальной.

#### 2.2. Вероятностная модель

При неограниченном увеличении числа стержней распределение стационарных интенсивностей изнашивания может быть определено с помощью функции распределения плотности вероятностей интенсивности изнашивания  $y = y(I_a^c)$  (рис. 9).

Если длительность процесса изнашивания составляет  $\tau$ , то интенсивность изнашивания отдельных стержней будет изменяться согласно рис. 9. Для группы стержней, стационарные интенсивности изнашивания которых лежат левее АБ, период приработки закончился, поэтому их интенсивность изнашивания соответствует стационарной. Для группы стержней, стационарные интенсивности изнашивания которых лежат правее АБ, период приработки еще не закончился, поэтому их интенсивность измерения определяется первой формулой зависимости (2.1.1).



Рис. 9 – Функция плотности вероятности стационарных интенсивностей изнашивания

Средняя интенсивность изнашивания образца:

$$\left\langle I_{g} \right\rangle = \frac{\int_{0}^{I} y(I_{g}^{c}) I_{g}^{c} dI_{g}^{c} + I \int_{I}^{\infty} y(I_{g}^{c}) dI_{g}^{c}}{\int_{I}^{\infty} y(I_{g}^{c}) dI_{g}^{c}}.$$
(2.1.3)

или, принимая путем выбора параметров уравнения  $\int_{0} y(I_{g}^{c}) dI_{g}^{c} = 1$ , получаем:

$$I_{g} = \int_{0}^{I} y(I_{g}^{c}) I_{g}^{c} dI_{g}^{c} + I \int_{I}^{\infty} y(I_{g}^{c}) dI_{g}^{c} .$$
(2.1.4)

Дифференцируя дважды по т с учетом выражения (2.1.1), получаем:

$$\frac{\partial^2 \left\langle I_g \right\rangle}{\partial \tau^2} = -k_0^2 y(I_g^c).$$
(2.1.5)

Таким образом, функция плотности вероятности стационарных интенсивностей изнашивания стержней является второй производной от уравнения зависимости интенсивности изнашивания образца от времени:

$$y(I_g^c) = -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 \langle I_g \rangle}{\partial \tau^2}.$$
(2.1.6)

Теперь найдем связь интегральной функции распределения стационарных интенсивностей изнашивания стержней и зависимости интенсивности изнашивания образца от времени.

Проинтегрировав выражение (2.1.4) по частям, продифференцировав его по  $\partial \tau$  и сделав некоторые другие несложные математические преобразования, получим:

$$I(I_g^c) = 1 - \frac{1}{k_0} \frac{\partial \langle I_g \rangle}{\partial \tau}, \qquad (2.1.7)$$

где  $P(I_g^c)$  – интегральная функция распределения стационарных интенсивностей изнашивания стержней.

Таким образом, полученные соотношения позволяют по известной зависимости интенсивности изнашивания образца получить интегральную и дифференциальную функции распределения стационарных интенсивностей изнашивания и, наоборот, по известному распределению триботехнических свойств образца построить зависимость интенсивности изнашивания от времени.

Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2012, № 3

#### 3. Обобщение закономерности до общего закона

1<sup>0</sup>. В этой связи представляется важным следующие утверждение на уровне теоремы: всякая нелинейность в большом, т.е. в модели более высокого уровня, является отражением статистической неоднородности в малом, т.е. в моделях более низкого уровня.

Действительно. Пусть задано некоторое свойство  $\sigma$  материального (n – мерного) пространства или системы в форме детерминированной (для простоты) функции одной переменной  $\epsilon$  (фактора) типа:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \, \boldsymbol{\sigma}_T) \,, \tag{2.1.1}$$

где  $\sigma_T$  – параметр функции.

Если представить это пространство (систему), состоящим из дискретных элементов, то аналогичное свойство каждого элемента системы представимо в виде интегральной функции распределения вероятностей P параметра  $\sigma_T^a(P)$  по элементам системы. При этом интегральная функция распределения связана с функцией  $f(\varepsilon, \sigma_T)$  линейными преобразованиями. В частности, эти функции могут совпадать с точностью до константы:

$$\boldsymbol{\sigma}_{T}^{o}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\,\boldsymbol{\sigma}_{T}\right). \tag{2.1.2}$$

Известны примеры построения моделей на основе этого подхода в механике деформируемых тел [1]. Ниже такой подход распространяется на одну из задач трибологии. При этом принимается, что приработка есть следствие усреднения интенсивностей изнашивания по элементам поверхности трения. Величина интенсивности весового износа определяется зависимостью:

$$I_{g} = \Delta G / (A_{\alpha} L_{TP}), \qquad (2.1.3)$$

где  $\Delta G$  – вес изношенного материала;

*A*<sub>α</sub> – номинальная площадь контакта;

 $L_{TP}$  – путь трения. Представим образец, испытываемый на износ, в виде системы n стержней, т.е. интенсивность весового износа образца (системы) является математическим ожиданием интенсивности весового износа стержней (элементов).

$$I_g = \left\langle I_{dk} \right\rangle. \tag{2.1.4}$$

2<sup>0</sup>. На основе сказанного может быть сформулировано обобщение зависимости нелинейности от неоднородности в механике в форме закона:

нелинейность процессов пластического деформирования, изнашивания (и других процессов в механике) является следствием статистической неоднородности структуры материала и вероятностной природы механических и трибологических свойств.

Можно предположить, что этот закон распространяется на другие виды процессов в физике, химии, термодинамике, биофизике, экономике, социологии и т.д.: нелинейность процессов в дискретных и сплошных системах, как правило, является следствием неоднородности характерных свойств элементов системы.

3<sup>0</sup>. В 1884 г. Ле-Шателье, а затем в 1887 г. Браун сформировали следующий общий принцип [6, с. 346]: внешнее воздействие, выводящее систему из состояния термодинамического равновесия, вызывает в системе процессы стремящиеся ослабить эффект воздействия.

Это качественная закономерность в открытых системах не определяет раскрытия сущности протекающих процессов и не дает ее математических моделей.

Синергетика – наука об общих законах самоорганизации, получившая развитие за последние 20 – 30 лет устанавливает экспериментально факты самоорганизации и общие математические методы описания этих процессов. Описания основываются на теориях устойчивости, фазовых переходах и т.д.

Сущность этих закономерностей состоит в том, что при внешних воздействиях на систему возможны различные равновесные состояния. Возрастание уровня внешних воздействий сопровождается процессом изменения внутреннего параметра системы.

В случае пластического деформирования траектория процесса – это диаграмма на грузка - перемещение  $O(u_0)$  в случае износа – зависимость интенсивности от времени  $I(\tau)$ .

В данной работе нами устанавливается нелинейность переходного процесса в случае, если деформируемый или изнашиваемый материал имеет статистическую неоднородность механических или трибологических свойств. При этом нелинейность процесса определяется видом функции плотности распределения вероятностей свойств. Полученные результаты нам представляются важными для понимания причин нелинейности процессов в механике.

#### Выводы по части 2

1. При пластическом деформировании сплошной среды зависимость напряжений от деформаций представляется в виде нелинейной функции диаграммы деформирования.

Ранее в работах [1, 2] была показана возможная однозначная связь функции распределения вероятности предела текучести в материале с нелинейной формой диаграммы деформирования материала.

В данной работе на основе указанной связи предлагается методика определения параметров функций распределения вероятностей неоднородностей.

2. При изнашивании поверхностей, как правило, имеется нелинейный участок зависимости износа от пути трения, именуемый приработкой.

В данной работе в развитие [3] показано, что между нелинейной зависимостью и функцией распределения вероятностей интенсивности износа существует однозначная зависимость.

Предложена общая методика определения параметров функции распределения вероятностей интенсивности износа по кривой приработки.

3. Зависимость нелинейности от неоднородности можно считать достаточно общим законом для механики, физики, химии и процессов в других научных областях.

### Литература

1. Гохфельд Д.А. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях / Д.А. Гохфельд, О.С. Саадаков. – М.: Машиностроение, 1984. – 256 с.

2. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. – К.: АН УССР, 1953. – 123 с.

3. Кузьменко А.Г. Нелинейность в моделях высокого уровня как следствие статистической неоднородности в моделях низкого уровня / Динамика, прочность и надежность транспортных машин / А.Г. Кузьменко, Г.С. Калда, А.А. Пасечник – Брянск: БИТМ, 1994. – С. 121-126.

4. Климонтович Н.Ю. Без формул в синергетике. – Минск: высшая школа. – 1986. – 228 с.

5. Синергетика и фракталы в материаловедении / В.С. Иванова, А.С. Баландин, И.Ж. Бутенин, А.А. Оксогоев. – М.: Наука. – 1994. – 383 с.

6. Физический энциклопедический журнал. – М.: Советская энциклопедия. – 1984. – 944 с.

Надійшла 30.07.2012



# ЧИТАЙТЕ журнал "Problems of Tribology" во всемирной сети INTERNET ! http://www.tup.km.ua/science/journals/tribology/

Проблеми трибології (Problems of Tribology) 2012, № 3