Number 13 - 1999

RATIO MATHEMATICA

Journal of Applied Mathematics

Contents

Ratio Mathematica 13
(1999), 5-28

SUR LA VALUATION STRICTE DES HYPERGROUPES POLYSYMETRIQUES CANONIQUES

par

JEAN MITTAS

ABSTRACT. This paper generalizes the theory of valuated and hypervaluated canonical hypergroups in the case of the polysymmetrical canonical hypergroups. We distinguish two types of hypervaluated canonical polysymmetrical hypergroups, the weakly and the strongly hypervaluated ones. The study of the last ones forms the main part of this paper, while the study of the weakly hypervaluated canonical polysymmetrical hypergroups is going to be the subject matter of another paper.

Préliminaires

L' hypergroupe polysymétrique canonique (H.P.C.) est, comme on le sait [26], un cas particulier de l' h y p e r g r o u p e p o l y s y m é t r i q u e (H.P.), qui a été introduit par la considération des matrices à éléments dans un hyperanneau ou dans un hypercorps[1] (ou, autrement dit, des hypermatrices) [3],

---

[1] Indépendamment de cette théorie la définition des H.P.C. est la suivante:

On appelle H.P.C. un ensemble H muni d' une hyperopération, qui, notée additivement, vérifie, quels que soient $x,y,z \in H$, les axioms:

[5], [9], [10], [13], [20], [28] moyennant une multiplication spécifique [3], [27]. La théorie des H.P.C. généralise celle des hypergroupes canoniques (H.C.) [12], [19] - qui, comme il est connu, constitue la base pour l' étude d' autres structures hypercompositionnelles, comme les hyperanneaux et les hypercorps (dont leurs parties additives sont des H.C.), les hypermodules et les hyperespaces vectoriels et, encore plus généralement, les hyperalgèbres linéaires [1], [3], [11], [20], [21], [23], [28] - D' autre part l' étude des valuations et hypervaluations des H.C. [14], [15], [16], [17], [18], [25] a enrichi la théorie générale des valuations - en liaison avec celle des structures hypercompositionnelles - par plusieurs résultats intéressants. Cette étude a été réalisée par la généralisation de la théorie correspondante des groupes valués

---

I. $x + y = y + x$

II. $(x + y) + z = x + (y + z)$

III. $(\exists 0 \in H)(\forall x \in H)[0+x = x]$ (L' élément 0, évidemment unique, est le zéro de H).

On note que, comme d' habitude, on identifie, quand rien ne s' y oppose, l' élément x avec le singleton correspondant $\{x\}$. Donc $0 + x = x$ au lieu de $0 + x = \{x\}$.

IV. $(\forall x \in H)(\exists x' \in H)[0 \in x+x']$ (Tout tel $x' \in H$ est un opposé ou symétrique de x et l' ensemble $S(x) = \{ x' \in H : 0 \in x + x' \}$ est le symétrique de x)

V. $z \in x + y \Longrightarrow (\exists x' \in S(x))[y \in z + x']$

Un H.P.C. diffère, comme il est visible, d' un hypergroupe canonique [12], [19] du fait que dans ce dernier, pour tout $x \in H$, $S(x)$ est un singleton, $\{ x' \}$, auquel cas, si on note $-x$ pour x', on aura pour l' axiome V

$$z \in x + y \Longrightarrow y \in z - x$$

D' autre part de l' axiome III il résulte facilement que, pour tout $x \in H$, $x+H = H$, ce qui avec II, justifie la caractérisation de cette structure comme hypergroupe [7], [8].

(et, pour de cas plus général, hypervalués), comme cette dernière a été formée par M. Krasner par l' introduction de l' ultramétricité et, en particulier, par la considération d' une distance ultramétrique c o m p a t i b l e avec la structure du groupe [4],[5],[6]. Ainsi, si (G,.) est un groupe et d: G x G ---> R+ (où R+ est l' ensemble des nombres réels non négatifs) est une ultramétrique sur G, la compatibilité de d se donne par la condition:

$$d(x,y) = d(ax, ay) = d(xa, ya)$$

quels que soient x,y,a dans G. Mais si on a que (G,.) ≡ (H,.) est un hypergroupe, les "hypercomposés" ax, ay, xa, ya ne sont pas, en général, des singletons et les distances d(ax, ay), d(xa, ya) n' ont pas, généralement, de sens. Mais si on suppose que pour tout x, y ∈ H les hypercomposés xy sont des cercles de l' espace ultramétrique (H,d), ces distances ont de sens, si ax ∩ ya = ∅, xa ∩ ya = ∅, ce qui donne la possibilité de construire une théorie analogue des valuations (et puis, des hypervaluations) pour les hypergroupes.

En particulier, pour exprimer cette compatibilité dans le cas des H.C. et ayant en vue la notion de l' hypercorps valué introduite par M. Krasner à partir d' un corps valué [5] (mais pour qui Krasner n' a pas occupé avec son étude), on a posé les deux conditions suivantes[1] [17], [25]:

---

1 Ces conditions peut être encore utilisées, comme il est clair, pour exprimer, la compatibilité de la distance ultramétrique au cas des hypergroupes complètement réguliers (au sens de Marty [8]) possédant un seul élément unité et qui cas est évidemment encore plus général que celui des H.C.

Si $(H,.)$ est un H.C. et $d: H \times H \longrightarrow R_+$ est une (distance) ultramétrique sur H, alors

h_1. Pour tout $x,y \in H$ la somme $x + y$ est un cercle de l' espace ultramétrique (H,d) de rayon proportionnel au $\max\{ d(0,x), d(0,y) \}$, où 0 est le zéro de H. C' est-à-dire il existe un nombre semi-réel $p \geq 0$ d' espèce 0 ou $-$ [4], tel que

$$x + y = C\ (z,\ p\max\{|x|,\ |y|\}),$$

où $z \in x + y$ est quelconque et où, pour tout $x \in H$, on met $|x| = d(0,x)$ en l' appelant valuation de l' élément x (la fonction $|.|: H \longrightarrow R_+$ ainsi définie étant la valuation de H associée à l' ultramétrique d).

h_2. Pour tout $x,y,a \in H$ tels que $(x+a) \cap (y+a) = \emptyset$ on a

$$d(x,y) = d(x+a,\ y+a)$$

Un H.C. muni d' une telle ultramétrique compatible avec la structure de l' hypergroupe a été appelé h y p e r g r o u p e c a n o n i q u e u l t r a m é t r i q u e et cette définition, plutôt géométrique, équivaut, comme celui-ci a été démontré, avec l' autre, purement algébrique, des h y p e r g r o u p e s c a n o n i q u e s v a l u é s [17], [25]. Pour le cas des H.C. h y p e r v a l u é s ou, de manière équivalents, h y p e r u l t r a m é t r i q u e s on a les mêmes conditions comme ci-dessus, mais, maintenant, l' ensemble où l' hypervaluation $|..|$ et l' hyperultramétrique d prennent leurs valeurs peut être, généralement, au lieu de R_+, un ensemble quelconque Ω totalement ordonné et possedant un plus petit élément, noté 0, et encore, au lieu du nombre semi-réel p, on a une fonction $p: \Omega \longrightarrow \Omega \cup \hat{\Omega}^-$ croissante et telle que $p.0 = 0$ et ou $\hat{\Omega}$ est le complete de Kurepa de Ω et $\hat{\Omega}^-$

est l' ensemble des éléments d' espèce - de $\hat{\Omega}$ [14], [15], [17], [18], [25].

La valuation (respec. l' hypervaluation) ainsi définie sur H peut être caractérisée comme s t r i c t e et les H.C. munis de telle valuation, s t r i c t e m e n t v a l u é s (H.C.SV) [respec. h y p e r v a l u é s (H.C.SH-V)] ou, de manière équivalente, s t r i c t e m e n t u l t r a m é t r i q u e s (H.C.SU) [respec. h y p e r u l t r a m é t r i q u e s (H.C.SH-U.)]. Car sauf cette manière de valuation (respec d' hypervaluation) des H.C. il y a encore une autre, selon laqelle l' ultramétrique (respec. l' hyperultramétrique) satisfait aux conditions plus faibles:

h_1'. Pour tout $x,y \in H$ la somme $x + y$ est un cercle de l' espace ultramétrique (H,d).

$h_2' \equiv h_2$

h_3'. Pour tout $x,y \in H$, si $x \in x + y$, alors $x + y = x$.

(h_3' à l' autre cas est une conséquence de h_1 et h_2 [14], [16], [17]). Les H.C. munis de telle ultramétrique (respec. hyperultramétrique) peut être caracterisés, contrairement au premier cas, f a i b l e m e n t v a l u é s (H.C.FV) [respec. h y p e r v a l u é s (H.C.FH-V)] ou f a i b l e m e n t u l t r a m é t r i q u e s (H.C.FU) [resp. h y p e r - u l t r a m é t r i q u e s (H.C.FH-U)]. Maintenant, en ce qui concerne les H.P.C., il est évidemment naturel que pour exprimer la compatibilité d' une ultramétrique définie sur eux avec leur structure d' hypergroupe d' accepter tout abord les conditions h_1' et $h_2' \equiv h_2$ et puis d' étudier les deux cas séparément. Le présent travail est ainsi consacré a l' étude du premier cas, c' est-à-dire aux hypergroupes polysymétriques canoniques strictement ultramétriques (H.P.C.SU), qui par définition satisfont aux conditions h_1 et h_2 [respec. hyperultramétriques (H.P.C.SH-U)], tandis que l' étude des H.P.C., satisfaisant aux conditions h_1', h_2' et a une généralisation convenable de h_3' et avec l' adjonction encore quelques autres axiomes et qui seront appelés hypergroupes polysymétriques canoniques faiblement ultramétriques (H.P.C.FU) (respec. hyperultramétriques (H.P.C.FH-U)) fera l' object d' un autre travail. Quant au premier cas, en étudiant les conséquences de la définition-ayant en vue mon travail [25], où la théorie des H.C. values et hypervalues (strictement) est exposée et où on peut trouver encore les éléments nécessaires de la théorie des espaces ultramétriques et des nombres semi-réels[1] - on a abouti à la conclusion que tout H.P.C.SU se réduit en H.C.SU. Mais bien que l' on a abouti ainsi, toutefois l' exposé detaillé de ce cas est absolument nécessaire pour l' étude de l' autre. D' autre part on se limite à l'étude seulement des H.P.C.SU, car l' étude des H.P.C.SH-U est pareille (avec de petites modifications évidentes) et, par coséquent, on a le même résultat final. C' est-à-dire que tout H.P.C.SH-U se réduit en H.C.SH-U.

---

1 Relativement voir encore [2], [4], [5], [6], [17]

Étude du premier cas: Les hypergroupes polysymétriques canoniques strictement ultramétriques (H.P.C.SU).

Soit $(H,+,d)$ un H.P.C.SU. Tout abord et d' après les propriétés des cercles des espaces ultramétriques, on déduit la propriété purement algébrique(c'est-a-dire qui s' exprime sans l' intervention de l' ultramétrique) suivante:

Proposition 1. *Quels que soient $x, y, z, w \in H$, si $(x+y) \cap (z+w) \neq \emptyset$, alors ou bien $x+y \subseteq z+w$, ou bien $z+w \subseteq x+y$*

D' autre part, comme aux H.C.SU [25], on a encore:

Proposition 2. *Pour tout $x,y \in H$ on a*

$$d(x,y) \leq p|x| \implies x = y$$

d' où il résulte que, si $H \neq \{0\}$, on a $p < 1$.
[Car $x + 0 = C(x,p|x|) = x$ et $y \in C(x,p|x|)$. Donc, si $0 = y \neq x$, alors $0 \notin C(x,p|x|)$ et $d(0,x) = |x| > p|x|$].

Remarques 1. a) Si on suppose que p est le plus petit des nombres semi-réels pour lesquels la condition h_1 est satisfaite, on aura toujours $0 \leq p < 1$ [c' est-à-dire soit $H \neq \{0\}$, soit $H = \{0\}$].
b) Évidemment, si $p = 0$, H est un groupe abélien.

En particulier, pour les opposés d' un $x \in H$ on a les propositions:

***Proposition* 3.** *Pour tout $x \in H$, $x' \in S(x)$, on a*

$$|x| = |x'|$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est clair pour $x = 0$. Soit $x \neq 0$ et qu' il existe un $x' \in S(x)$ tel que $|x| \neq |x'|$. Si $|x'| < |x|$, alors $x + x' = C(0,p|x|)$ et $x \notin x + x'$. Car $x \in x + x'$ $\Longrightarrow$ $d(0,x) = |x| \leq p|x|$ $\Longrightarrow$ $p \geq 1$, ce qui est inexact d' après la proposition précédente. Donc, par l' axiome h_2 et en vertu des propriétés des cercles (distance de cercles disjoints)

$$d(0,x') = d(x+0,x+x') = d(x,0)$$

Si $|x| < |x'|$, on a de même $x' \notin x + x'$ et on aboutit par le même raisonnement à la même conclusion $|x| = |x'|$.

***Corollaire* 1.** *Pour tout $x', x'' \in S(x)$ on a*

$$|x'| = |x''|$$

***Corollaire* 2.** *Pour tout $x' \in S(x)$, $x^* \in S(x')$ on a*

$$|x^*| = |x|$$

***Proposition* 4.** *Pour tout $x \in H$; $x', x'' \in S(x)$ on a*

i) $x + x' = x + x''$ *ii)* $x \notin x + x'$

D é m o n s t r a t i o n. i) Évident, car $(x+x') \cap (x+x'') \neq \emptyset$ et $|x| = |x'| = |x''|$.

ii) Il résulte de la démonstration de la proposition précedente.

La proposition qui suit accomplit la proposition 1 et elle joue un rôle important pour la suite.

***Proposition* 5.** *Quels que soient $x, y, a \in H$, si $(x+a) \cap (y+a) \neq \emptyset$, alors $x+a = y+a$.*

D é m o n s t r a t i o n. On sait [26] que

$$(a + x) \cap (a + y) \neq \emptyset \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\exists a' \in S(a))(\forall x' \in S(x))(\exists x'' \in S(x'))(\exists y' \in S(y))$$
$$[(a+a') \cap (x''+y') \neq \emptyset]$$

Alors, si $0 \notin x'' + y'$, on a $x'' + y' \subset a + a'$, d' où (pour les rayons des cercles $x''+y'$, $a+a'$) $p\max\{|x''|,|y'|\} < p\max\{|a|,|a'|$ et, d' après les précédents, $\max\{|x|, |y|\} < |a|$, donc $x + a =$ $= y + a$, ces deux cercles non disjoints ayant des rayons semi-réels égaux. Si $0 \in x'' + y'$, alors $|x''| = |y'|$ (donc $|x| = |y|$) et, encore, ou bien $x'' + y' \subseteq a + a'$, ou bien $a + a' \subset x'' + y'$, d' où il résulte respectivement, ou bien $|x| = |y| < |a|$, ou bien $|a| < |x| = |y|$ et on a, comme auparavant, $x + a = y + a$.

***Corollaire* 3.** *Quels que soient $x,y,a \in H$, les ensembles $x + a$, $y + a$ sont ou bien disjoints, ou bien coïncidents.*

***Proposition* 6.** *Pour tout $x,y \in H$, $x' \in S(x)$ on a*

i) Si $y \notin S(x)$, alors $(x + y) \cap (x + x') = \emptyset$

ii) Si $x \in x + y$, alors $x + y = x$

D é m o n s t r a t i o n. i) En effet, si $(x+y) \cap (x+x') \neq \emptyset$, on aurait $x+y = x+x'$, donc $y \in S(x)$, ce qui est contradictoire.

ii) $x \in x+y \Longrightarrow (x+0) \cap (x+y) \neq \emptyset \Longrightarrow x+y = x+0 = x$

Propositon 7. *Pour tout* $x, y \in H$, $x' \in S(x)$, *si* $y \in x + x'$, *alors* $S(y) \subseteq x + x'$.

D é m o s t r a t i o n. En effet $y \in x+x' \Longrightarrow y \in C(0,p|x|) \Longrightarrow d(0,y) = |y| \leq p|x| \Longrightarrow y' \in C(0,p|x|) = x + x'$, pour tout $y' \in S(y)$.

Proposition 8. *Pour tout* $x \in H$, $x', x'' \in S(x)$ *on a:*

$$S(x') = S(x'')$$

D é m o s t r a t i o n. En effet, $x^{*} \in S(x') \Longrightarrow 0 \in x' + x^{*} \Longrightarrow x + x'' \subseteq (x + x'') + (x' + x^{*}) \Longrightarrow 0 \in (x' + x) + (x'' + x^{*}) \Longrightarrow 0 \in (x' + x^{*}) + (x'' + x^{*})$, car $x' + x = x' + x^{*}$ d' après la proposition 4i. Donc il existe $y \in x'' + x^{*}$ et $y' \in S(y)$ tel que $y' \in x' + x^{*}$. Mais $y' \in x' + x^{*} \Longrightarrow S(y') \subseteq x' + x^{*} \Longrightarrow y \in x' + x^{*}$, donc $(x' + x^{*}) \cap (x'' + x^{*}) \neq \emptyset$, et, en vetru de la proposition 5, $x' + x^{*} = x'' + x^{*}$, donc $0 \in x'' + x^{*}$, c' est-à-dire $x^{*} \in S(x'')$ et, comme $x^{*} \in S(x')$ est n' importe quel, alors $S(x') \subseteq S(x'')$. Symétriquement on trouve $S(x'') \subseteq S(x')$, d' où la conclusion.

Corollaire 4. *Pour tout* $x \in H$, $x^{*} \in S(S(x))$ *on a*

$$S(x) = S(x^{*})$$

Corollaire 5. *Pour tout* $x, y \in H$ *on a*

$$S(x) \cap S(y) \neq \emptyset \Longrightarrow S(x) = S(y)$$

[Car il existe $z \in S(x) \cap S(y)$, donc $x \in S(z)$ et $y \in S(z)$, d'où $S(x) = S(y)$].

Remarques 2. a) Pour tout $x \in H$ il est évident que

$$S(S(x)) = \cup_{x' \in S(x)} S(x') = S(x')$$

quelque soit $x' \in S(x)$.

b) Désormais et à cause des propositions 4i et 8 - et seulement quand il n' y a pas le risque de confusion - on va utiliser pour exprimer un n' importe quel élément $x' \in S(x)$ la notation $-x$. Ainsi on aura

$x + x' = x + x'' = \ldots = x - x$, $S(S(x)) = S(-x)$

Proposition 9. *Pour tout* $x, y \in H$, $x' \in S(x)$, $y' \in S(y)$, *si* $S(x) \cap S(y) = \emptyset$ *(donc*[1] $S(x) \neq S(y)$ *) on a*

$$d(x,y) = |x + y'| = |y + x'|$$

où, évidemment, si $A \subseteq H$, $|A| = \{ |z| \in R_+ : z \in A\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que, si $S(x) \cap S(y) = \emptyset$, alors $x' \notin S(y)$ et $y' \notin S(x)$ et, d' après la proposition 6i on a $(x + y') \cap (x + x') = \emptyset$ et $(y + x') \cap (y + y') = \emptyset$. Par conséquent, vu h_2 et les propriétés des cercles,

$$d(x,y) = d(x+x', y+x') = d(0, y + x') = |y + x'|$$

$$d(x,y) = d(x+y', y+y') = d(0, x + y') = |x + y'|$$

---

1 Il est possible que l'on ait $x \neq y$, mais $S(x) = S(y)$, comme on a aux certains exemples en [26] et aux divers cas des H.P.C.

Il en résulte que les ensembles $|x + y'|$ et $|y + x'|$ sont des singletons (même égaux).

La proposition suivante généralise la proposition ci-dessus 6ii

Proposition 10. *Pour tout* $x, y \in H$, $x' \in S(x)$, $x^* \in S(x')$, *si* $x^* \in x + y$, *alors* $x + y = x^*$. *Donc, si* $x \in x^* + y$, *on a* $x^* + y = x$.

Démonstration. En effet $x^* \in x + y \Longrightarrow (\exists x'' \in S(x))[y \in x^* + x'']$ donc, en vertu du corollaire 4, et de la proposition 4i, $y \in x + x' = C(0, p|x'|)$, d'où $|y| \le p|x| < |x|$ Par conséquent $x + y = C(x^*, p|x|) = C(x^*, p|x^*|)$, d'après le corollaire 2. Donc, $x + y = x^*$, car $C(x^*, p|x^*|) = x^* + 0 = x^*$.

Proposition 11. *Pour tout* $x \in H$, $y \in x - x$ *il existe* $x^* \in S(-x)$ *tel que* $x + y = x^*$ *et* $x^* - y = x$.

Demonstration. En effet $y \in x + x' \Longrightarrow (\exists x'' \in S(x))[x' \in y + x''] \Longrightarrow x + x' \subseteq x + y + x'' \Longrightarrow 0 \in x + y + x'' \Longrightarrow (\exists x^* \in S(x''))[x^* \in x + y]$ et, d'après la proposition précédente, $x + y = x^*$ [Évidemment, si on change x' dans $S(x)$, x^* ne change pas, la somme $x+y$ étant toujours la même]. D'autre part $x + y = x^* \Longrightarrow x + y + y' = x^* + y' \Longrightarrow x \in x^* + y' \Longrightarrow x^* + y' = x$, pour tout $y' \in S(y)$, donc $x^* - y = x$.

Corollaire 6. *Pour tout* $x \in H$, $x' \in S(x)$, $y, y' \in x - x$ [*car, d'après la proposition 7,* $S(y) \subseteq x - x$] *il existe* $x'' \in S(x)$ *tel que* $x' + y' = x''$.

Proposition 12. *Pour tout* $x \in H$ *on a*

$$x + (x - x) = S(-x)$$

D é m o s t r a t i o n. Évidemment, d' après les précédents, $x + (x - x) \subseteq S(-x)$. D' autre part pour tout $x^* \in S(-x)$ on a $x^* \in x^* + (x + x') = x + (x^* + x') = x + (x + x')$ (par Prop. 4i et Cor. 4), donc $S(-x) \subseteq x + (x - x)$, d' où l' égalité.

Remarque 3. Il est visible que, si pour $x,y,a \in H$ on a $x + a = y + a$, alors il résulte que

$$x + (a - a) = y + (a - a)$$

Mais le reciproque est aussi vrai, c' est-à-dire on a encore la proposition importante suivante:

Proposition 13. *Quels que soient* $x,y,a \in H$, *si* $x + (a - a) = y + (a - a)$, *alors*

$$x + a = y + a$$

D é m o s t r a t i o n. On distingue deux cas: $y \in S(a)$ et $y \notin S(a)$.

i) Soit $y \in S(a)$. Alors: $(x + a) + a' = y + (a + a') \Longrightarrow a' \in (x + a) + a' \Longrightarrow (\exists\, t \in x + a)\ [a' \in t + a'] \Longrightarrow t + a' = a'$, par la proposition 6ii. Donc on a $t + a' + a = a + a'$, d' où $t \in a + a'$, et, par conséquent, $t \in (x + a) \cap (a + a')$, mais qui est absurde, si $x \notin S(a)$, vu la proposition 6i. Il en résulte que $x \in S(a)$, donc $(x + a) \cap (y + a) \neq \emptyset$ et, en vertu de la proposition 5 (ou, de même, par la prop. 4i), $x + a = y + a$.

ii) Soit $y \notin S(a)$. Alors: $x + (a - a) = y + (a - a) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (x + a) + (a - a) = (y + a) + (a - a)$, dont il s' ensuit

$$(\forall u \in x + a)(\exists v \in y + a)(\exists t \in a - a)[u \in v + t]$$

D' autre part

$$v + t = C(u, p\max\{|v|, |t|\})$$

et, comme $(y + a) \cap (a - a) = \emptyset$, on a $|t| = d(0,t) < d(0,v) = |v|$ (d' après les propriétés des cercles), donc

$$v + t = C(u, p|v|)$$

Encore on a $S(v) \cap S(t) = \emptyset$, car autrement $S(v) = S(t) \subseteq a - a$ selon le corollaire 5 et la proposition 7. Donc, il vient que $v \in a - a$ et, par suite, $(y + a) \cap (a - a) \neq \emptyset$, mais ce qui est contradictoire, vu la proposition 6i. En appliquant, donc, la proposition 9, on a

$$|v| = d(0,v) = d(a-a,\ y+a) = d(t',v) = d(t'+t,\ v+t) = |v+t|$$

[car $t' \in a-a$ et $(a - a) \cap (y + a) = \emptyset$, $(t' + t) \cap (v + t) = \emptyset$] et, comme $u \in v+t$, on a $|u| \in |v+t|$, donc $|u| = |v|$. Il en résulte que

$$v + t = C(u, p|u|) = u + 0 = u$$

Mais $v + t = u \Longrightarrow (u + t) \cap (v + t) = (u + t) \cap \{u\}$ et on distingue deux cas: $u \in u + t$ et $u \notin u + t$.

Si $u \in u + t$, alors $u + t = u$, qui entraîne $u + t + t' = u + t'$ donc $u \in u + t'$, d' où, de même, $u + t' = u$ [toujours par la même proposition 6ii et pour tout $t' \in S(t)$]. Mais $v + t = u$ implique $v + t + t' = u + t'$, donc $v \in u + t'$ pour tout $t' \in S(t)$. Il en résulte que $u = v$ et par conséquent $(x + a) \cap (y + a) \neq \emptyset$, d' où l' égalité $x + a = y + a$.

Si $u \notin u + t$, on aura $(u + t) \cap (v + t) = \emptyset$, donc

$$d(u,v) = d(u+t,\ v+t) = d(u+t,\ u) = d(u+t,\ u+0) = d(t,0) = |t|$$

Si on suppose $(x+a) \cap (y+a) = \emptyset$, on aura $d(u,v) > p\max\{|x|, |a|\}$

[et $d(u,v) > p\max\{|y|,|a|\}$] donc $d(u,v) > p|a|$. Mais, d' autre côté, $t \in a - a \Longrightarrow |t| \leq p\max\{|a|,|-a|\} = p|a|$, c' est-à-dire $d(u,v) \leq p|a|$, qui contredit au précédent. Par conséquent $(x + a) \cap (y + a) = \emptyset$ est impossible, donc $(x+a) \cap (y+a) \neq \emptyset$ et $x + a = y + a$.

Corollaire 7. *Si $x + (a - a) = y + (a - a)$, alors*

$$x + a^{*} = y + a^{*} \quad et \quad x + a' = y + a'$$

quels que soient $a' \in S(a)$, $a^{*} \in S(-a)$.

Relativement aux sommes $x + x' = x - x$ on a la proposition:

Proposition 14. *i) Pour tout $x \in H$ le sous- -ensemble $x - x$ est un sous-hypergroupe polysymétrique canonique (S-H.P.C) de H.*

ii) Pour tout $x, y \in H$ on a

$$(x-x)+(y-y) = \max\{x-x,\ y-y\} = (x-x)\cup(y-y) = \bigcup_{z \in (x-x)+(y-y)}(z-z)$$

D é m o n s t r a t i o n. i) Étant donné que $y \in x - x \Longrightarrow S(y) \subseteq x - x$, il suffit de montrer que $y_1, y_2 \in x - x \Longrightarrow y_1 + y_2' \subseteq x - x$ pour tout $y_2' \in S(y_2)$ [26]. En effet $y_1, y_2 \in x - x = x + x' \Longrightarrow y_1 + y_2' \subseteq (x + x') + y_2' = x + (x' + y_2')$ et, puisque d' après le corollaire 6 il existe $x'' \in S(x)$ tel que $x' + y_2' = x''$, $y_1 + y_2' \subseteq x + x'' = x - x$, pour tout $y_2' \in S(y_2)$.

ii) Évident, contenu que $x - x \subseteq y - y$ ou $y - y \subseteq x - x$ et que $x - x$ et $y - y$ sont des S-H.P.C. de H [donc $z \in x - x \Longrightarrow z - z \subseteq -z + (x - x) = x - x$].

Corollaire 8. *Pour tout* $x \in H$ *le sous-ensemble* $x - x = h_x$, *étant S-H.P.C. de H, définit la partition (mod* h_x*) de H, dont les classes sont* $C(z) = z + (x - x)$ *[25].*

Ensuite et relativement aux partitions de H on voit que l' on a (du corollaire 3) la proposition cosiderable suivante:

Proposition 15. *Si* $x \in H$ *est fixé, les sommes* $x + y$ *quand y parcourt H forment une partiton de H, notée mod x, pour laquelle on a évidemment:*

$$z \equiv w \pmod{x} \Longleftrightarrow (\exists y \in H)[(z \in x + y) \wedge (w \in x + y)]$$

D' autre part il est évident que l' on a encore que la relation binaire R_x dans H tel que

$$z \equiv w\ (R_x) \Longleftrightarrow x + z = x + w$$

est une relation d' équivalence. Mais de la remarque 3 et la proposition 13 on a que

$$x + z = x + w \Longleftrightarrow z + (x - x) = w + (x - x)$$

donc, vu encore le corollaire 8,

$$(\ R_x\ ) \equiv (\ \mathrm{mod}\ h_x\ )$$

Soit maintenant $z \equiv w \pmod{x}$. Alors, il existe $y \in H$ tel que $z, w \in x + y$ et on a $y \in z + x'$ et $y \in w + x''$, pour $x', x'' \in$ $\in S(x)$ convenables, d' où il vient $x + y \subseteq z + (x + x')$ et $x + y \subseteq w + (x + x'')$, donc $[z + (x - x)] \cap [w + (x - x)] \neq \emptyset$ et, par conséquent, $z \equiv w \pmod{x-x}$ et, encore, vu les precédents, $z = w\ (R_x)$.

Inversement, soit $z \equiv w \pmod{x-x}$. Alors, $z+(x+x') = x+(z+x')$ $= w+(x+x') = x+(w+x')$ et il existe $y_1 \in z+x'$ et $y_2 \in w+x'$ tels que $z \in x+y_1$ et $w \in x+y_2$. Mais, d' après le corollaire 7,

$z+(x+x') = w+(x+x')$ implique $z+x' = w+x'$, donc $y_1, y_2 \in z+x'$, c' est-à-dire on a $y_1 \equiv y_2 \pmod{x'}$ et, en vertu des ci-dessus, $y_1 \equiv y_2\ (R_{x'})$. Il s' ensuit, donc, que $y_1 + x' = y_2 + x'$, puis $y_1 + (x + x') = y_2 + (x + x')$ et (par la proposition 13) $y_1 + x = y_2 + x$, qui implique que $z, w \in x + y_1$, c' est-à-dire que $z \equiv w \pmod{x}$.

On est arrivé ainsi a l' énoncé suivant, consideré comme lemme pour le théorème considerable qui suit

Lemme. *Les relations d' équivalences dans H mod x, mod$(x-x)$ et R_x sont coincidantes.*

Par cosequent les classes contenant un $z \in H$ pour chacune d' elles coincident. Ainsi la classe mod$(x - x)$ contenant l' élément $x' \in S(x)$ est $C_{x-x}(x') = x' + (x - x) = x' + (x' + x) =$ $= S(x)$, d' après la proposition 12, tandis que pour la classe $C_{x'}(x')$ mod x' pour le même $x' \in H$ on a $C_{x'}(x') = x' + y$, car, d' après la proposition 15, il existe un $y \in H$ tel que $x' \in$ $\in x' + y$. Mais $x' \in x' + y$ implique $x' + y = x'$ (Prop. 6ii). Donc, on a $S(x) = x'$ et évidemment on a la même chose pour tout $x \in H$ et pour tout $x' \in S(x)$. On a aboutit, ainsi, que pour tout $x \in H$, $S(x)$ est un singleton, c' est-à-dire au théorème, que l' on a mentionné au commencement:

Théorème. *Tout H.P.C.U. est un H.C.U.*

Des précédents on conclût encore la remarque suivante concernant aux hypergroupes fortement canoniques (H.FC)

Remarque 4. Un tel H.C. vérifie de plus par définition les axiomes

$f_1 \equiv$ Proposition 1 et $f_2 \equiv$ Proposition 6ii.

De ces axiomes (comme il est connu de la théorie des H.FC. [24], [25]) il découle la proposition 5. Mais on a vu que très facilement et de manière purement algébrique la proposition 5 implique la proposition 6ii. On déduit, donc, qu' un H.FC. peut être défini de manière équivalente par les axiomes f_1 et $f_2' \equiv$ Proposition 5 [22].

On achève cet exposé en citant un exemple montrant qu il existe des H.P.C.FV et que, par conséquent, le chemin pour leur étude est ouvert. L' ultramétrique d' un tel hypergroupe satisfait aux conditions h_1' et h_2' des H.C.FV citées à l' introduction, mais non à h_3', au lieu de laquelle vérifie d' autres conditions, dont la recherche pour le cas général fait d' objet d' autre travail. Le sujet est ouvert.

Exemple Si en partant d' un corps totalement ordonné, p.e. le corps $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ des nombres réels, on definit une hyperaddition $x \dotplus y$ comme suit

$$x \dotplus y = y \dotplus x = \begin{cases} y, \text{ si } |x| < |y| \\ \\ [-|x|,\ |x|], \text{ si } |x| = |y| \end{cases}$$

on obtient une hyperstructure $(\mathbb{R},\dotplus)$, qui, comme on le voit facilement, est un H.P.C. avec $S(x) = \{-x,\ x\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On voit encore que la fonction $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$d(x,y) = d(y,x) = \begin{cases} |y|, & \text{si } |x| < |y| \\ 0, & \text{si } y = x \\ |x|, & \text{si } y = -x \end{cases}$$

est une ultramétrique sur R, qui, comme on le costante aprés une investigation pour les différents cas de $x, y, a \in H$ (en particulier pour $|a| \leq |x| < |y|$, $|x| < |a| < |y|$, $|x| < |y| \leq |a|$ et pour $y = x$, $y = -x$) vérifie l' axiome h_2'. Quant à l' axiome h_1' on voit que l' on a tout abord, si $||x||$ est la valuation associée à l' ultrametrique d, alors

$$d(0,x) = ||x|| = |x| \quad \text{et} \quad d(0,-x) = ||-x|| = |x|$$

donc $||x|| = ||-x||$. Par conséquent

$$\text{si } |x| < |y|, \text{ on a } x \dotplus y = C(y, |y|^-) = C(y, 0),$$

tandis que

$$\text{si } |x| = |y|, \text{ alors } x \dotplus y = [-|y|, |y|] = C(0, |y|).$$

C' est-à-dire, en utilisant le nombre semireél ρ, on a généralement

$$x \dotplus y = C\,(z, \rho\max\{|x|, |y|\})$$

avec

$$\rho = \begin{cases} 1^-, & \text{si } |x| < |y| \\ 1, & \text{si } |x| = |y| \end{cases}$$

Autrement dit, les hypersommes $x \dotplus y$ sont des cercles de l' espace ultramétrique (R, d) dont les rayons sont dépendants du $\max\{|x|, |y|\}$, mais sans un même coefficient de proportionnalité. L' axiome donc h_1' est aussi vérifié.

Enfin, en ce qui concerne l' axiome h_3', celui-ci, évidemment, ne marche pas en général. Mais on voit que l' on a des propriétés qui auraient pu jouer le rôle de h_3' à la définition des H.P.C-FV, comme p.e.

Si $x \in x + y$, alors ou bien $x + y = x$, ou bien $y \in S(x)$ [donc, ici, $S(x) \cap S(y) \neq \emptyset$]

et

Si $S(x) \cap S(y) = \emptyset$, alors pour tout $x', x'' \in S(x)$, $y', y'' \in S(y)$, ou bien $(x \dotplus x') \cap (y \dotplus x'') = \emptyset$, ou bien $(y \dotplus y') \cap (x \dotplus y'') = \emptyset$ [tandis que dans un H.C.FV, donc dans un H.FC (Remarque 4 et [22]), on a $x \neq y \implies -x \neq -y \implies$ $\implies S(x) \cap S(y) = \emptyset \implies (x - y) \cap (x - x) = \emptyset$ et $(y - x) \cap (y - y) = \emptyset$, vu que $S(x) = \{-x\}$, $S(y) = \{-y\}$].

RÉFÉRENCES

[1] P. CORSINI : *Hypergroupes réguliers et hypermodules.*
Ann. Univ. Ferrara, Sc. Math. 1975.

[2] L. DOCAS : *Sur les classes de Baire des functions semi-réeles.*
Bull. Soc. Math. Greece T.15, p. 83-88, 1974.

[3] S. IOULIDIS - J. MITTAS : *Sur certaines notions préliminaires de l' hyperalgèbre linéaire - Introduction de l' hypergroupe polysymétrique.*
Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών, T.58, σελ. 361 - 392, Αθήναι 1983.

[4] M. KRASNER : *Nombres semi-réeles et espaces ultramétriques.*
C. R. Acad. Sci. (Paris), Tome II, 219, pp. 433-437, 1944.

[5] M. KRASNER : *Approximation des corps values complets de caractéristique p ≠ 0 par ceux de caractéristique 0 .*
Colloque d' Algèbre Supérieure (Bruxelles, Décembre 1956), CBRM, Bruxelles, 1957.

[6] M. KRASNER : *Introduction à la théorie des valuations.*
Cours de la Faculté de Sciences de l' Université de Paris, 1967 et 1968.

[7] M. KRASNER : *Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications a la théorie de Galois et de produit d' entrelacement ("Wreath Product") de groupes.*
Math. Balk. 3, pp. 229-280, 1973.

[8] **F. MARTY** : *Sur une généralisation de la notion de groupe.*
Actes de 8me Congrès des mathématiciens Scad., pp. 45-49, Stockholm 1934.

[9] **C.G. MASSOUROS** : *On the theory of hyperrings and hyperfields.*
АЛГЕБРА И ЛОГИКА 24:6, pp. 728-742, 1985.

[10] **C.G. MASSOUROS** : *Methods of constructing hyperfields.*
Internat. J. Math. and Math. Sci. Vol. 8 No 4, pp. 725-728, 1985.

[11] **C.G. MASSOUROS** : *Free and cyclic hypermodules.*
Annali Di Mathematica Pura ed Applicata, Vol. CL. pp. 153-166, 1988.

[12] **J. MITTAS** : *Sur une classe d' hypergroupes commutatifs.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 269, Série A, pp. 485-488, 1969.

[13] **J. MITTAS** : *Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 269, Série A, pp. 623-626, 1969.

[14] **J. MITTAS** : *Hypergroupes canoniques hypervalués.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 271, Série A, pp. 4-7, 1970.

[15] **J. MITTAS** : *Les hypervaluations strictes des hypergroupes canoniques.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 271, Série A, pp. 69-72, 1970.

[16] J. MITTAS : *Contributions à la théorie des hypergroupes, hyperanneaux et hypercorps hypervalués.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 272, Série A, pp. 3-4, 1971.

[17] J. MITTAS : *Hypergroupes values et hypergroupes fortement canoniques.*
Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών έτους 1969, τομ. 44, σ. 304 - 312, Αθήναι, 1971.

[18] J. MITTAS : *Hypergroupes canoniques values et hypervalués.*
Math. Balk, 1, pp. 181-185, 1971.

[19] J. MITTAS : *Hypergroupes canoniques.*
Mathematica Balkanica, 2, pp. 165-179, 1972.

[20] J. MITTAS : *Sur les hyperanneaux et les hypercorps.*
Math. Balk. 3, 1973.

[21] J. MITTAS : *Sur certains classes de structures hypercompositionnelles.*
Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών, 48, σελ. 298-318, Αθήναι 1973.

[22] J. MITTAS : *Certaines remarques sur les hypergroupes canoniques hypervaluables et fortement canoniques.*
Rivista di Matemetica Pura ed Applicata No 9, pp.61-67, 1991.

[23] J. MITTAS : *Éspaces vectoriels sur un hypercorps - Introduction des hyperspaces affines et Euclidiens.*
Mathematica Balkanica 5, pp. 199-211, 1975.

[24] J. MITTAS : *Hypergroupes fortement canoniques et supérieurement canoniques.*
Proceedings II of the Inter. Symp. on applications of Mah. in Syst. theory pp. 27-30, December 1978.

[25] J. MITTAS : *Hypergroupes canoniques values et hypervalués - Hypergroupes fortement et superieurement canoniques.*
Bull. of the Greek Math. Soc. 23, pp. 55- 88, Athens, 1982.

[26] J. MITTAS : *Hypergroupes polysymétriques canoniques.*
Atti del convegno su ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni, pp. 1-25, Udine 1985.

[27] J. MITTAS - S. IOULIDIS : *Sur les hypergroupes polysymétriques commutatifs.*
Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste, Vol. XVIII, pp. 125-135, 1986.

[28] D. STRATIGOPOULOS : *Hyperanneaux non comutatifs, hypermodules, hyperespaces vectorieles et leurs propriétés élémentaires.*
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, pp. 489-492, Série A, 1969.

Adresse: Jean Mittas,
UNIVERSITE ARISTOTLE DE THESSALONIKI
5, rue Edmond Abbot
546 43 Thessaloniki
GRECE