Number 12 - 1997

RATIO MATHEMATICA

Journal of Applied Mathematics

Contents

Ratio Mathematica 12
(1997), 3-18

LES HYPERTREILLIS TRES FINS

Cornelia Gutan *

Résumé. Dans ce travail on caractérise les semi-hypergroupes idempotents commutatifs très fins. Comme application on détermine la structure des hypertreillis très fins.

Abstract. In this paper, the very thin commutative idempotent semigroups are characterized. As application, the structure of all very thin hyperlattices is determined.

1991 A.M.S. Mathematics Subject Classification : 20N20

Key words ans phrases : treillis, hypertreillis, hyperstructure très fine.

* Département de Mathématiques, Université Al. I. Cuza, 6600, Iasi, Roumanie *et*
Département de Mathématiques, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière Cedex, France,
e-mail : gutan@ucfma.univ-bpclermont.fr

1. Introduction

L'étude des hypertreillis a été commencée par M. Konstantinidou et J. Mittas dans [15] (voir aussi [6] et [14]). Des résultats remarquables dans ce domaine ont aussi été obtenus par R. Procesi-Ciampi et R. Rota ([17]) qui ont donné un théorème de représentation de type Stone pour une classe particulière d'hypertreillis, la classe des hyperalgèbres de Boole, comme réponse à un problème de S. Comer (voir [2], Problème 15).

Définition 1.1. Un *hypertreillis* est un ensemble non vide L, muni d'une hyperopération $\dot\vee$ et d'une opération $\wedge$ tels que, pour tous x, y, z de L, les conditions suivantes sont satisfaites :

i) $x \in x \dot\vee x$ i') $x = x \wedge x$

ii) $x \dot\vee y = y \dot\vee x$ ii') $x \wedge y = y \wedge x$

iii) $(x \dot\vee y) \dot\vee z = x \dot\vee (y \dot\vee z)$ iii') $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

iv) $x \in x \dot\vee (x \wedge y)$ iv') $x \in x \wedge (x \dot\vee y)$

v) $x \in x \dot\vee y$ si et seulement si $x \wedge y = y$.

Si $(L, \dot\vee)$ satisfait les conditions i)-iii), donc si $(L, \dot\vee)$ est un semi-hypergroupe commutatif très fin ayant la propriété $x \in x \dot\vee x$, pour tout $x \in L$, on dit que $(L, \dot\vee)$ est un *semi-hypertreillis.*

L'exemple le plus connu d'hypertreillis est le suivant.

Exemple 1.2.

Soit $(L, \vee, \wedge)$ un treillis modulaire. On définit sur L une hyperopération par

$$x \,\dot\vee y = \{ z \in L \mid x \vee z = y \vee z = x \vee y \}.$$

Alors $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ est un hypertreillis (voir [1], [4], [12] ou [16]). En particulier, pour le treillis $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ de toutes les parties d'un ensemble quelconque X on a
$A\dot{\vee}B = \{C \in \mathcal{P}(X) \mid A \triangle B \subseteq C \subseteq A \cup B\}$ et $A \wedge B = A \cap B$, pour tous A et B de $\mathcal{P}(X)$. L'hypertreillis $(\mathcal{P}(X), \dot{\vee}, \wedge)$ est même une hyperalgèbre de Boole (voir [17]).

On ne connait pas beaucoup d'autres exemples d'hypertreillis. Ici on obtient de nouveaux exemples : les hypertreillis très fins.

Les hyperstructures très fines sont des structures algébriques multivalentes mais qui s'ecartent le moins possible des structures traditionnelles dont les opérations sont univalentes. Ainsi, par exemple, un hypergroupoïde est un ensemble non vide H muni d'une opération qui fait correspondre, à chaque couple d'éléments x et y, un produit xy qui est une partie non vide quelconque de H au lieu d'être formé simplement d'un unique élément. Un hypergroupoïde très fin est alors un hypergroupoïde où tous les produits xy sont des singletons sauf un seul $ab = A$ que l'on qualifie d'*exceptionnel.* Cette notion a été introduite par T. Vougiouklis dans l'étude des représentations des hypergroupes par des hypermatrices et des permutations généralisées. Les hyperstructures très fines sont de plus intéressantes car elles ont des applications directes dans diverses branches de mathématiques comme la théorie de groupes, combinatoire, probabilités et statistique, criptographie, informatique théorique ...

L'étude du lien entre un hypergroupoïde très fin et la famille de ses groupoïdes sous-jacents lorsque l'hypergroupoïde vérifie des conditions supplementaires comme la (faible) associativité ou la reproductibilité a été faite dans [9] et [11]. Les hypergroupes et les H_V-groupes ont été caractérisés dans [7]. De même, les semi-hypergroupes commutatifs très fins ont été caractérisés dans [10]. On mentionne aussi que des résultats sur les hyperstructures très fines ont été obtenu dans [8], [13] et [18].

Dans ce travail on caractérise les hypertreillis très fins.

Remarquons que si $(L, \vee, \wedge)$ est un treillis modulaire alors l'hypertreillis $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ construit dans l'exemple 1.2 est très fin si et seulement si Card $L = 2$ (cela découle du fait que $x \dot{\vee} x = \{z \in L \mid z \leq x\}$, pour tout $x \in L$). On déduit que $(\mathcal{P}(X), \dot{\vee}, \wedge)$ est un hypertreillis très fin si et seulement si Card $X = 1$.

2. Les semihypertreillis très fins

Dans la suite, pour tout semi-groupe commutatif $(S, \cdot)$ on désigne par $K(S)$ le noyau de S (s'il existe). Notons que si S est un semi-groupe commutatif idempotent alors $K(S)$ existe si et seulement si S a un élément zéro z et alors $K(S) = \{z\}$. De même, lorsque I est un idéal du semi-groupe S et $u \in S$ on note par λ_u la translation intérieure $\lambda_u : I \rightarrow I$, $\lambda_u(x) = u \cdot x$, pour tout $x \in I$. On désigne par $E(f)$ le sous-ensemble de S défini par $E(f) = \{s \in S | \lambda_s = f\}$, où $f : I \longrightarrow I$ est une application.

On a le résultat suivant, établit dans [9].

Théorème 2.1.

Soient H un semi-hypergroupe commutatif très fin dont (a, a) est le couple exceptionnel. On considère $S = H \setminus \{a\}, B = (aa) \cap S$ et $\varphi : S \to H$ l'application définie par $\varphi(s) = as$, pour tout $s \in S$. Soient $T = \overset{-1}{\varphi}(a), I = S \setminus T$ et $\psi = \varphi_{|I} : I \to I$ la restriction de la fonction φ à I. Alors :

i) *S est un sous-semi-groupe de H.*

ii) *si T est non vide alors T est un sous-semi-groupe de S.*

iii) *si I est non vide alors I est un idéal de S.*

De plus, lorsque $a \in aa$ il existe $\alpha \in S$ tel que $\psi = \lambda_\alpha$ et :

I. *si $T = S$ alors $B = K(S)$.*

II. *si $T = \emptyset$ alors $\emptyset \neq B \subset E(\lambda_\alpha)$, où α est un élément idempotent de S.*

III. *si $\emptyset \subsetneqq T \subsetneqq S$ alors seulement les trois situations suivantes sont possibles :*

   i) *$B = K(T) \subset E(\lambda_{\alpha^2})$, où $\alpha \in B$.*

   ii) *$B = K(T) \cup \{\beta\}$, où β est un élément idempotent de I tel que $\beta = \beta \cdot T$, $\alpha \in K(T)$ et $K(T) \subset E(\lambda_\alpha)$.*

   iii) *$\emptyset \neq B \subset E(\lambda_\alpha) \cap I$ et $B = B \cdot t$, pour tout $t \in T$, où α est un élément de I tel que $\lambda_{\alpha^2} = \lambda_\alpha$.* ∎

On utilise le théorème précédent pour obtenir la structure des semi-hypertreillis très fins.

Soit $(S, \vee)$ un semi-groupe commutatif idempotent. Alors $(S, \vee)$ est un semi-treillis par rapport à une relation d'ordre définie par $x \leq y$ si et seulement si $x \vee y = y$, o x et y de S. On considère aussi $H = S \cup \{a\}$, où a est un élément qui n'appartient pas à S.

On utilise ces données pour raliser les constructions suivantes.

Construction 1.

Soit α un élément quelconque dans S et T un sous-ensemble de S tel que $T \leq \alpha$. Si T est non vide alors T est un sous-semi-groupe de S. De même, si $I = S \setminus T$ est non vide alors I est un idéal de S. On définit sur H une hyperopération par :

$$\begin{aligned}
a \dot{\vee} a &= \{a, \alpha\}, \\
a \dot{\vee} T &= T \dot{\vee} a = a, \\
a \dot{\vee} x &= x \dot{\vee} a = \alpha \vee x, \quad \text{pour tout } x \in I \\
x \dot{\vee} y &= x \vee y, \text{ pour tous } x, y \text{ dans } S.
\end{aligned}$$

On désigne par $H_1(S, a, \alpha)$ l'hyperstructure ainsi obtenue (elle correspond au cas I du Théorème 2.1 si α est le plus grand élément de S; sinon elle résulte du cas III. i).

Construction 2.

Soit $\alpha \in S$. En analysant les cas II et respectivement III. iii) on déduit qu'il faut et il suffit de choisir T un sous-ensemble de S de sorte que $T < \alpha$ et $x \vee y \in T$ si et seulement si x, y sont tous les deux dans T. Cela découle du fait que si T est non vide alors T est un sous- semi-groupe de S et $I = S \setminus T$ est un idéal de S (bien évidemment $I \neq \emptyset$ car $\alpha \in I$). On considère sur H une hyperopération définie par :

$$\begin{aligned} a\dot{\vee}a &= \{a, \alpha\}, \\ a\dot{\vee}T &= T\dot{\vee}a = a, \\ a\dot{\vee}x &= x\dot{\vee}a = \alpha \vee x, \quad \text{pour tout} \quad x \in I, \\ x\dot{\vee}y &= x \vee y, \quad \text{pour tous} \quad x, y \text{ dans } S. \end{aligned}$$

On désigne par $H_2(S, a, \alpha, T)$ cette hyperstructure (elle correspond au cas II du Théorème 2.1 si $T = \emptyset$; sinon, elle correspond au cas III. iii).

En particulier, lorsque α est tel que si $x < \alpha$ et $y < \alpha$ alors on a aussi $x \vee y < \alpha$, on peut prendre $T < \alpha$.

Il reste à analyser le cas III. ii).

Construction 3.

Soient α et β deux éléments du semi-groupe S et T un sous-ensemble dans S tel que $T \leq \alpha$. Alors T est un sous-semigroupe de S.

Le cas III. ii) est possible si et seulement si $\beta = \beta \vee t$, pour tout $t \in T$, et $\beta \vee u = \alpha \vee u$, pour tout $u \in I = S \setminus T$.

Compte tenu de la manière dont T est défini, la condition $\beta = \beta \vee t$, pour tout $t \in T$, est équivalente à $\alpha < \beta$.

De même, la condition $\beta \vee u = \alpha \vee u$, pour tout $u \in I$, est équivalente à l'égalité

$$\{s \in S \mid \alpha \leq s\} = \{\alpha\} \cup \{s \in S \mid \beta \leq s\}.$$

En effet, supposons $\beta \vee u = \alpha \vee u$, pour tout $u \in I$ (donc pour tout u tel que $u \not\leq \alpha$).

Evidemment $\{s \in S \mid \alpha \leq s\} \supset \{\alpha\} \cup \{s \in S \mid \beta \leq s\}$. On démontre maintenant l'inclusion réciproque.

Soit $s \in S, \alpha < s$. Donc $s \not\leq \alpha$. Alors $\beta \vee s = \alpha \vee s = s$, d'où $\beta \leq s$.

Réciproquement, supposons

$\{s \in S \mid \alpha \leq s\} = \{\alpha\} \cup \{s \in S \mid \beta \leq s\}$.

On considère $u \in I$ (c'est-à-dire $u \nleq \alpha$). Comme $\alpha < \beta \leq \beta \vee u$ on a $\alpha < \beta \vee u$. On obtient $\alpha \vee u \leq \beta \vee u$. D'autre part $\alpha < \alpha \vee u$ (si $\alpha = \alpha \vee u$ alors $u \leq \alpha$, qui est une contradiction) donc $\beta \leq \alpha \vee u$ et, par conséquent, $\beta \vee u \leq \alpha \vee u$.

On voit ainsi que pour le cas III.ii) il faut choisir α et β dans S de sorte que $\alpha < \beta$ et que l'intervalle $[\alpha, \beta]$ ne contienne aucun autre élément à l'exception de α et β, donc $[\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\}$. On considère sur H une hyperopération définie par :

$$\begin{aligned}
a \dot{\vee} a &= \{a, \alpha, \beta\}, \\
a \dot{\vee} T &= T \dot{\vee} a = a, \\
a \dot{\vee} x &= x \dot{\vee} a = \beta \vee x, \quad \text{pour tout } x \in I, \\
x \dot{\vee} y &= x \vee y, \text{ pour tous } x, y \text{ dans } S.
\end{aligned}$$

On note par $H(S, a, \alpha, \beta)$ l'hyperstructure obtenue de cette manière.

En utilisant les constructions 1, 2 et 3 on obtient le théorème-résumé de la "typologie" suivant.

Théorème 2.2.

Soit H un semi-hypertreillis très fins. Alors il existe un semi-groupe commutatif idempotent $(S, \vee)$ et un élément $a \notin S$ tels que $H = S \cup \{a\}$ et H est de l'un des types suivants :

- $H = (H_1(S, a, \alpha), \dot{\vee})$, *où $\alpha \in S$ et T est un sous-ensemble de S tel que $T \leq \alpha$;*

- $H = (H_2(S, a, \alpha, T), \dot{\vee})$, *où* α *est un élément de* S *et* $T < \alpha$ *est un sous-ensemble de* S *de sorte que* $x \vee y \in T$ *si et seulement si* $x \in T$ *et* $y \in T$;
- $H = (H(S, a, \alpha, \beta), \dot{\vee})$, *où* α, β *sont des éléments de* S *de sorte que* $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\}$ *et* T *est un sous-ensemble de* S *tel que* $T \leq \alpha$. ∎

3. Les hypertreillis très fins

Dans ce paragraphe on détermine la structure des hypertreillis très fins.

Lemme 3.1.

Soit L *un ensemble non vide sur lequel on définit une hyperopération* $\dot{\vee}$ *telle que* $(L, \dot{\vee})$ *soit un semi-hypertreillis très fin dont* (a, a) *est le couple exceptionnel. Sur* L *on considère aussi une opération* $\wedge$ *qui fait de* L *un semi-treillis. Alors* $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ *est un hypertreillis très fin si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *pour tout* x, y *de* $L \setminus \{a\}$, $x \wedge y = x$ *si et seulement si* $x \dot{\vee} y = y$;

(2) $\{x \in L \setminus \{a\} \mid a \wedge x = x\} = \{x \in L \setminus \{a\} \mid a \dot{\vee} x = a\}$;

(3) $\{x \in L \setminus \{a\} \mid a \wedge x = a\} = \{x \in L \setminus \{a\} \mid a \dot{\vee} x = x\}$.

Démonstration :

Supposons que $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ est un hypertreillis très fin dont le couple exceptionnel soit (a, a). On utilise la condition v) (Définition 1.1) pour démontrer que les conditions (1), (2) et (3) sont satisfaites.

Si dans la condition v) on prend x et y dans $L \setminus \{a\}$

alors on a $x \wedge y = x$ si et seulement si $x \dot{\vee} y = y$. Donc on obtient la condition (1).

Pour démontrer (2) on applique v) pour le couple (a, x), où $x \in L \setminus \{a\}$. Alors $a \in a \dot{\vee} x$, c'est-à-dire $a = a \dot{\vee} x$, équivaut à $x = x \wedge a$.

De la même manière, pour $x \in L \setminus \{a\}$ et $y = a$, de v) on déduit (3).

Réciproquement, supposons que les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiées. Pour montrer que $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ est un hypertreillis très fin il reste à vérifier les conditions iv) et iv') de la Définition 1.1.

Les conditions iv) et iv') sont évidemment satisfaites si $x = y = a$. Il faut encore vérifier les trois autres situations possibles.

Soient $x = a$ et $y \in L \setminus \{a\}$. Il faut démontrer que $a \in a \dot{\vee} (a \wedge y)$, respectivement $a \in a \wedge (a \dot{\vee} y)$. Si $a \wedge y = a$ alors évidemment $a \in a \dot{\vee} (a \wedge y)$. Supposons $a \wedge y = z \in L \setminus \{a\}$. Alors $a \wedge z = z$ et puisque $z \in L \setminus \{a\}$, d'après (2), il s'ensuit que $a \dot{\vee} z = a$. Donc $a \dot{\vee} (a \wedge y) = a$. Si $a \dot{\vee} y = a$, la condition iv') est vérifiée. Supposons $a \dot{\vee} y = z$, où $z \in L \setminus \{a\}$. Alors $a \dot{\vee} z = z$ et, de (3), on déduit $a \wedge z = a$. Donc $a \wedge (a \dot{\vee} y) = a$.

Soient $x \in L \setminus \{a\}$ et $y = a$. Alors lorsque $x \wedge a = a$, d'après (3) on a $a \dot{\vee} x = x$, c'est-à-dire $x \dot{\vee} (x \wedge a) = x$. De même, lorsque $x \wedge a = z \in L \setminus \{a\}$ il s'ensuit que $z \wedge x = z$ et, de (1) , on a alors $z \dot{\vee} x = x$. Donc $x = x \dot{\vee} (x \wedge a)$. En ce qui concerne iv') si $x \dot{\vee} a = a$ alors, d'après (2), $x \wedge a = x$, donc $x \wedge (x \dot{\vee} a) = x$. Sinon, supposons que $x \dot{\vee} a = z$, où $z \in L \setminus \{a\}$.

Alors $x\dot{\vee}z = z$ et puisque la condition (1) est satisfaite, on a $x \wedge z = x$, donc $x \wedge (x\dot{\vee}a) = x$.

Il reste à analyser le cas x et y dans $L\setminus\{a\}$. Evidemment, si $x \wedge y = a$, alors $x \wedge a = a$ et, en utilisant (3) on déduit $a\dot{\vee}x = x$. Donc $x = x\dot{\vee}(x \wedge y)$. Si $x \wedge y = z \in L \setminus \{a\}$ alors $x \wedge z = z$ et conformément à $(1), x\dot{\vee}z = x$, donc $x = x\dot{\vee}(x \wedge y)$. Pour démontrer iv') remarquons que si x et y sont dans $L\setminus\{a\}$ alors, du Théorème 2.1, $x\dot{\vee}y = z \in L\setminus\{a\}$. Donc $x\dot{\vee}z = z$ et de $(1), x \wedge z = x$. On déduit $x \wedge (x\dot{\vee}y) = x$. ∎

On considère

$T = \{x \in L \setminus \{a\} \mid a\dot{\vee}x = a\}$ et $\widetilde{T} = \{x \in L \setminus \{a\} \mid a\dot{\vee}x = x\}$.

Alors les conditions (2) respectivement (3) sont équivalentes à

$T = \{x \in L \setminus \{a\} \mid a \wedge x = x\}$ et $\widetilde{T} = \{x \in L \setminus \{a\} \mid a \wedge x = a\}$.

Si $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ est un hypertreillis très fin alors $(L, \dot{\vee})$ est un semi-hypertreillis très fin. Donc il existe un sous-semi-groupe S de L tel que $L = S \cup \{a\}$, où $a \notin S$. De plus, sur S on a une relation d'ordre $\leq$ telle que $sup_{\leq}(x, y)$ existe pour tous x, y de S et si $\vee = \dot{\vee} \mid_{S\times S}$ alors $x \vee y = sup_{\leq}(x, y)$.

D'autre part, $(L, \wedge)$ est un semi-treillis, donc on a sur L une relation d'ordre $\preceq$ de sorte que pour tous x, y de L il existe $inf_{\preceq}(x, y)$ et $x \wedge y = inf_{\preceq}(x, y)$.

Du Lemme 3.1 on déduit maintenant que $(L, \dot{\vee}, \wedge)$ est un hypertreillis très fin si et seulement si

$(*)$ les relations $\leq$ et $\preceq$ coïncident sur $L \setminus \{a\}$ et $T \prec a \prec \widetilde{T}$.

On remarque aussi que si x, y sont deux éléments de

$L \setminus \{a\}$ tels que $x \wedge y = a$ alors $a \prec x$, $a \prec y$, donc x, y sont dans $\widetilde{T}$ et il n'existe pas $t \in \widetilde{T}$ tel que $t \leq x, t \leq y$.

On étudie maintenant de quelle manière il faut définir une opération sur $(H_1(S,a,\alpha), \dot{\vee})$, respectivement sur $(H_2(S,a,\alpha,T), \dot{\vee})$ et sur $(H(S,a,\alpha,\beta), \dot{\vee})$ pour que l'hyperstructures ainsi obtenues soient des hypertreillis très fins.

L'ordre $\leq$ induit sur $S \cup \{a\}$ un ordre $\preceq$ par $T \prec a \prec \widetilde{T}$.

Il faut alors que $inf_{\preceq}(x,y) = x \triangle y$ existe pour tout couple (x,y) d'éléments de $S \cup \{a\}$.

Par rapport à T, et à $\widetilde{T}$, il y a a trois cas possibles, où $T \subset S, \widetilde{T} \subset I$.

I. Pour $(H_1(S,a,\alpha,), \dot{\vee})$ on a $T \leq \alpha$ et $\alpha < \widetilde{T}$.

II. De même, pour $(H_2(S,a,\alpha,T), \dot{\vee})$ on a $T < \alpha$ et $\alpha \leq \widetilde{T}$.

III. Si on considère $(H(S,a,\alpha,\beta), \dot{\vee})$ alors $T \leq \alpha$ et $\beta \leq \widetilde{T}$.

Dans les deux derniers cas $\widetilde{T}$ a un plus petit élément, donc $x \triangle y = x \wedge y \in S$, pour tous x, y de S. Par conséquent, on obtient le théorème suivant, qui donne la structure des hypertreillis très fins correspondants à $(H_2(S,a,\alpha,T), \dot{\vee})$, respectivement à $(H(S,a,\alpha,\beta), \dot{\vee})$.

Théorème 3.2.

Soient $(S, \vee, \wedge)$ un treillis et a un élément qui n'appartient pas à S. Alors $(H_2(S,a,\alpha,T), \dot{\vee}, \triangle)$ respectivement $(H(S,a,\alpha,\beta), \dot{\vee}, \triangle)$ est un hypertreillis très fin si et seulement si l'opération $\triangle$ est définie sur $H = S \cup \{a\}$ par :

$$\begin{aligned} a\triangle a &= a\triangle\widetilde{T} = \widetilde{T}\triangle a = a, \\ a\triangle x &= x\triangle a = \alpha\wedge x, \textit{pour tout } x \in S\setminus\widetilde{T}, \\ x\triangle y &= x\wedge y, \textit{pour tous } x, y \textit{ dans } S. \end{aligned}$$

Démonstration :

Supposons que $(H_2(S,a,\alpha,T),\dot{\vee},\triangle)$ est un hypertreillis très fin. Alors $T \prec a \prec \alpha \leq \widetilde{T}$.

Si $v \in T, v\wedge a = v = \alpha\wedge v$. Soit $v \in S\setminus(T\cup\widetilde{T})$. On a $\alpha\wedge v \prec v$ et $\alpha\wedge v \prec \alpha$. De $\alpha\wedge v \prec \alpha$ il s'ensuit $\alpha\wedge v \in T$, donc $\alpha\wedge v \prec a$. Par conséquent $\alpha\wedge v$ est un minorant de l'ensemble $\{a,v\}$. Si u est un autre minorant de l'ensemble $\{a,v\}$ alors $u \prec v$ et $u \prec a$. On déduit que $u \in T$, donc $u \prec \alpha$. Par conséquent $u \prec \alpha\wedge v$.

Le résultat concernant $(H(S,a,\alpha,\beta),\dot{\vee},\triangle)$ découle d'un raisonnement analogue. ∎

On donne maintenant la construction de l'hypertreillis très fin qui correspond à $(H_1(S,a,\alpha),\dot{\vee})$. D'après les conditions $(*)$ il s'ensuit qu'il faut considérer $(S,\leq)$ un treillis. Donc pour tout couple d'éléments de S il faut qu'il existe $sup_{\leq}(x,y)$ et $inf_{\leq}(x,y)$. On pose

$$sup_{\leq}(x,y) = x\vee y \quad \text{et} \quad inf_{\leq}(x,y) = x\wedge y.$$

On considère $\alpha \in S$ et T, $\widetilde{T}$ des sous-ensembles de S tels que $T \leq \alpha, \alpha < \widetilde{T}$. La relation d'ordre $\leq$ considérée sur S induit sur $S\cup\{a\}$ un ordre $\preceq$ défini par $\preceq\, = \,\leq \cup(T\times\{a\})\cup(\{a\}\times\widetilde{T})\cup\{(a,a)\}$. De plus, $(S\cup\{a\},\preceq)$ doit être un semi-treillis, i.e. pour tout couple (x, y) de $S \cup \{a\}$ il existe $inf_{\preceq}(x, y) = x\triangle y$. Alors

$$\begin{aligned} &a\triangle a = a, \\ &a\triangle t = t, \text{ pour tout } t \in T, \\ &a\triangle \widetilde{t} = \widetilde{t}, \text{ pour tout } \widetilde{t} \in \widetilde{T}. \end{aligned}$$

Avec un raisonnement similaire aux deux cas précédents on déduit $a\triangle x = \alpha \wedge x$, pour tout $x \in S \setminus (T \cup \widetilde{T})$.

Supposons qu'il existe x et y dans S tels que $x\triangle y = a$. Alors $a \prec x, a \prec y$, donc $x, y \in \widetilde{T}$ et, par conséquent, $\alpha < x$ et $\alpha < y$. De plus , si $u \in S$ est un minorant de l'ensemble $\{x, y\}$ alors $u \prec a$, donc $u \leq \alpha$. On déduit que $x \wedge y = \alpha$.

Ainsi $x\triangle y = a$, pour tous x, y dans S tels que $x \wedge y = \alpha$, et $x\triangle y = x \wedge y$, pour tous x, y dans S tels que $x \wedge y \neq \alpha$.

Compte tenu de ces remarques on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.

Soit $(S, \vee, \wedge)$ un treillis et a un élément qui n'appartient pas à S. Alors $(H_1(S, a, \alpha), \dot{\vee}, \triangle)$ est un hypertreillis très fin si et seulement si l'opération $\triangle$ est définie sur $H = S \cup \{a\}$ par :

$$\begin{aligned} a\triangle a &= a = x\triangle y, \textit{pour tous } x, y \textit{ dans } S \textit{ tels que } x \wedge y = \alpha; \\ x\triangle y &= x \wedge y, \textit{ pour tous } x, y \textit{ dans } S \textit{ tels que } x \wedge y \neq \alpha; \\ a\triangle x &= x\triangle a = x, \textit{ pour tout } x \in T \cup \widetilde{T}; \\ a\triangle x &= x\triangle a = \alpha \wedge x, \textit{ pour tout } x \in S \setminus (T \cup \widetilde{T}). \end{aligned}$$ ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] COMER S.D., *Constructions of color schemes*, Acta Universitatis Carolinae (Math. et Phys.), 24(2)(1983), 39-48 .

[2] COMER S.D., *Some problems on hypergroups*, Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, 1990, World Scientific, 67-74.

[3] CORSINI P., *Sur les semi-hypergroupes complets et les groupoïdes*, Atti. Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat., 26(1980), 391-396.

[4] CORSINI P., *Feebly canonical and 1-hypergroups*, Acta Universitatis Çarolinae (Math. et Phys.) 24(1983), 49-56 .

[6] CORSINI P., *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, 1993.

[7] GUTAN C., *Les hypergroupes et les H_V groupes très fins*, Rivista di Matematica Pura ed Applicata, 15 (1994), 111-127.

[8] GUTAN C., *On the very thin hyperrings*, Proceedings of the Fifth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Iasi, 1994, Hadronic Press, Palm Harbor (U.S.A.), 153-162.

[9] GUTAN C., *Les hypergroupoïdes très fins* (à paraître dans Bollettino della Unione Matematica Italiana).

[10] GUTAN C., *Sur les semi-hypergroupes commutatifs très fins,* (à paraître dans Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena).

[11] GUTAN C.,*On very thin hyperstructures,* (à paraître dans Hyperstructures and Applications, Palm Harbor, Florida ; editor T. Vougiouklis).

[12] HARRISON D.K., *Double coset and orbit spaces,* Pacific J. Math. 80 (1979), 451-491.

[13] KONGUETSOF L., SPARTIALIS S., VOUGIOUKLIS T., *Sur les hyperstructures très fines,* Rendiconti di Matematica (Roma), Serie VII, 13(1993), 297-304.

[14] KONSTANTINIDOU M., MITTAS J., *Introduction à l'hyperalgèbre de Boole,* Mathematica Balcanica, 6 (1976), 314-320.

[15] KONSTANTINIDOU M., MITTAS J., *An introduction to the theory of hyperlattices,* Mathematica Balcanica, 7 (1977), 187-193.

[16] MADDOX R. , *Embeding modular lattices into relation algebras,* Algebra Universalis, 12 (1981), 242-244.

[17] PROCESI CIAMPI R. , ROTA R., *Stone's representation theorem for Boolean hyperalgebras,* Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, 1990, World Scientific, 161-165.

[18] VOUGIOUKLIS T., *Hyperstructures and their Representations,* Hadronic Press, Florida, 1994.