Ratio Mathematica 11
(1996), 23 - 33

SULLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE CHE CONSERVANO LA NORMA IPERBOLICA E I SETTORI IPERBOLICI

Ferdinando Casolaro*, Franco Eugeni, Giovanni Mataloni*****

Dedicato al ricordo del nostro compianto amico Bruno Rizzi

SUNTO - Si introducono e si studiano le trasformazioni lineari che conservano i settori e le norme iperboliche.

1. Introduzione

Nella presente nota desideriamo presentare una certa classe di trasformazioni lineari di un piano euclideo in se, che presentano una serie di analogie, certamente non casuali, con i classici movimenti del piano.
I movimenti del piano sono biezioni che conservano:
(a) La distanza di due punti, ovvero la <u>norma euclidea</u> di un vettore, ovvero, usando la rappresentazione complessa, la norma di un numero complesso.
(b) L'angolo di due semirette, ovvero il prodotto scalare di due vettori, ovvero il "prodotto scalare di due numeri complessi."
Ricordiamo che i movimenti sono anche definibili come trasformazioni linerari conformi, ovvero come affinità nelle quali sono uniti i punti ciclici del piano, cioè i punti impropri della coppia di rette di equazioni:

$$x^2 + y^2 = 0\,.$$

---

* Dip.[to] di Scienze, Università di Benevento

** Università degli Studi di Roma Tre

*** Dip.[to] di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro -"G. D'Annunzio" Chieti

Nel paragrafo 2 daremo una rilettura di dette trasformazioni facendo ricorso alla rappresentazione complessa, mediante la quale la presentazione e la trattazione analitica è molto agevole.

Nel paragrafo 3 presenteremo alcune interessanti strutture, precisamente l'algebra dei numeri bireali o iperbolici e l'algebra dei numeri duali o parabolici. Si tratta di una rilettura di "vecchi argomenti" ripresentati come strumenti di lavoro e in modo estremamente sintetico. Queste due algebre, assieme all'algebra dei numeri complessi, sono le uniche tre algebre reali, doppie, associative e commutative.
Nel paragrafo 4, del tutto originale, mediante una analogia aturale tra "circolare" e "iperbolico" introdurremo e studieremo le "trasformazioni iperboliche" e le loro proprietà. Tali trasformazioni conservano:
(a) La distanza iperbolica di due punti ovvero la "norma iperbolica di un vettore"
ovvero usando la rappresentazione iperbolica, la norma di un numero iperbolico.
(b) Conservano il settore iperbolico associato a due semirette, ovvero il "prodotto iperbolico di due vettori" ovvero "il prodotto iperbolico di due numeri iperbolici".

Marginalmente siamo condotti, in modo del tutto naturale, ad introdurre il concetto di *esponenziale iperbolico* per il quale valgano formule del tutto analoghe a quelle di Eulero.

2. Numeri complessi e movimenti del piano

Il punto di partenza di questo paragrafo è l'evidenziare quella naturale biezione tra il piano euclideo "vettoriale" e il piano Argaud-Gauss rappresentativo dei numeri complessi, biezione che nasce nel modo seguente. Denotata con, $\vec{i}, \vec{j}$ una base ortonormale del piano euclideo e con i l'unità complessa associamo due elementi quali il vettore $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e il numero complesso $\alpha = a + ib$, per il fatto di essere rappresentati dalla medesima coppia (a,b).
Evidenzieremo i seguenti elementi:
a) Il modulo $|\vec{u}|$ di un vettore $|\vec{u}|$, ovvero la norma "circolare" $|\alpha|$ del numero complesso α, ad esso associato, sono individuate da

$$u^2 = |\vec{u}|^2 = a^2 + b^2, |\alpha|^2 = a^2 + b^2$$

b) Il prodotto interno di due vettori di componenti (a,b) e (a',b') si definisce ponendo:

$$\vec{u}\times\vec{v}=aa'+bb'.$$

Chiamiano prodotto circolare (o interno) di due numeri complessi α e β di componenti rispettive (a,b) e (a',b') il numero:

$$\alpha\times\beta=aa'+bb'.$$

In tale modo l'angolo di due vettori ovvero di due numeri complessi α e β ha un coseno dato da:

$$\cos\vartheta=\frac{\alpha\times\beta}{|\alpha|\cdot|\beta|}.$$

c) I numeri complessi di norma unitaria sono costituiti dal cosiddetto "esponenziale complesso" o "circolare" definito ponendo

$$e^{i\vartheta}=\exp(i\vartheta)=\cos\vartheta+i\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

E' semplice provare che le due trasformazioni aventi le seguenti equazioni:

$$\text{(2.1)}\ Z'=e^{i\vartheta}Z, \qquad \text{(2.2)}\ Z'=e^{i\vartheta}\overline{Z}$$

rappresentano, rispettivamente, i *movimenti diretti* ed *inversi* del piano (con l'origine fissa). Questa circostanza si verifica facilmente scrivendo le equazioni per esteso:

$$\begin{aligned}Z'=x'+iy'=e^{i\vartheta}Z&=(\cos\vartheta+i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)(x+iy)=\\&=(x\cos\vartheta-y\,\mathrm{sen}\,\vartheta)+i(x\,\mathrm{sen}\,\vartheta+y\cos\vartheta)\end{aligned}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned}Z'&=x'+iy'=e^{i\vartheta}Z=\\&=(\cos\vartheta+i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,(x-iy)=\\&=(x\cos\vartheta+y\,\mathrm{sen}\,\vartheta)+i(x\,\mathrm{sen}\,\vartheta-y\cos\vartheta).\end{aligned}$$

E' facile verificare direttamente che le due trasformazioni indicate, oltre ad essere chiaramente lineari, conservano la norma e gli angoli. Per la norma basta osservare che:

$$(2.3)\quad |Z'| = |e^{i\vartheta} Z| = |e^{i\vartheta}| \cdot |Z| = |Z|$$

ed analogamente, per la seconda trasformazione, per essere $|\overline{Z}| = |Z|$.

In quanto alla conservazione degli angoli, se moltiplichiamo col prodotto interno il numero complesso Z per il suo trasformato $Z' = e^{i\vartheta}Z$ secondo la (2.1) si ha:

$$\begin{aligned} Z' \times Z &= x(x\cos\vartheta - y\,\mathrm{sen}\,\vartheta) + y(x\,\mathrm{sen}\,\vartheta + y\cos\vartheta) = \\ &= (x^2 + y^2)\cos\vartheta = Z^2\cos\vartheta = |Z'|\cdot|Z|\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Non si ottiene un analogo risultato moltiplicando la (2.2) avendosi

$$\begin{aligned} Z' \times Z &= x(x\cos\vartheta + y\,\mathrm{sen}\,\vartheta) + y(x\,\mathrm{sen}\,\vartheta - y\cos\vartheta) = \\ &= (x^2 - y^2)\cos\vartheta + 2xy\,\mathrm{sen}\,\vartheta. \end{aligned}$$

In quanto alla (2.1) il risultato si interpreta geometricamente notando che l'operatore $e^{i\vartheta}$ trasforma il vettore Z in un vettore Z' ruotato di ϑ, attorno all'origine e in senso antiorario. In altre parole la (2.1) è una *rotazione pura*.

Per la (2) si può notare che essa si può pensare composta mediante le due trasformazioni:

$$Z' = e^{i\vartheta}W, \quad (2.2a) \qquad W = \overline{Z} \quad (2.2b)$$

La (2.2b) è la simmetria rispetto all'asse delle ascisse, mentre la (2.2a) è una rotazione pura. La composizione è dunque una "*generica simmetria*" il cui asse è la "retta di punti uniti" che la (2.2) presenta come trasformazione lineare. Un semplice calcolo implica che la (2.2) ha come retta di punti uniti la retta H

$$x(\cos\vartheta - 1) + y\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0 \qquad (2.3)$$

e centro nel punto $C = (0, -\mathrm{sen}\,\vartheta, \cos\vartheta + 1)$.

Ciò equivale a dire che la (2.2) è una omologia di centro C e asse (3) o anche una simmetria ortogonale di asse (3) nella direzione di C.

3. Le tre algebre reali doppie

L'osservazione fatta all'inizio del Par.2 permette di riguardare un numero complesso come un vettore 2-dimensionale ed è in tal senso che, l'algebra dei numeri complessi, si riguarda come un'algebra di dimensione due sui numeri reali.
In questo paragrafo vogliamo rimarcare, anche se ciò è noto in letteratura, e ridimostrare, in modo diretto ed elementare e per esclusivi fini didattici, che tale algebra dei numeri complessi, in quanto algebra doppia associativa, commutativa ed unitaria non è l'unica di interesse.
Sia A l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali scritti nella forma binomiale a+ib, con $a,b \in R$ dove i è una "indeterminata formale".
Supponiamo che in A siano definite due operazioni:
(+): l'operazione di addizione definita, nella maniera consueta come "somma di coppie posto a posto":

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

l'operazione di moltiplicazione definita in fase preliminare ponendo:

$$(a+ib)\cdot(c+id)=ac+i(ad+bc)+bdi^2$$

dove il quadrato della indeterminata si definisce in forma più generale col porre:

$$i^2=\alpha i+\beta \tag{3.1}$$

essendo $\alpha, \beta \in R$ preassegnati,
Si dimostra facilmente che tale algebra è associativa, commutativa, unitaria e anche distributiva rispetto alla somma, quali che siano $\alpha, \beta \in R$.
Presentiamo tre esempi:
a) Se l'equazione (3.1) è :

$$i^2=-1$$

si ha l'ordinaria algebra dei <u>numeri circolari o complessi</u> che oltre alle proprietà su esposte, non contiene divisori dello zero.

b) Se l'equazione (3.1) è:

$$i^2 = 1$$

si ha una differente algebra, detta algebra dei numeri bireali o iperbolici.
La struttura di tale algebra naturalmente non può essere quella di campo
in quanto l'equazione: $x^2 = 1$, avrebbe almeno quattro soluzioni:

$$x = \pm 1, x = \pm i.$$

Ci sono inoltre, divisori dello zero, avendosi:

$$0 = i^2 - 1 = (i-1)(i+1)$$

c) Se l'equazione (3.1) è :

$$i^2 = 0$$

si ha una terza algebra, detta algebra dei numeri parabolici o duali che non risulta isomorfa a nessuna delle due precedenti. Anche l'algebra dei numeri parabolici non forma un campo ammettendo, ad esempio, i come divisore dello zero. E' facile verificare che i numeri duali, chiaramente non isomorfi ai numeri complessi, sono non isomorfi anche ai numeri bireali. Infatti un divisore dello zero, nei numeri duali, ha la parte reale nulla, mentre un numero bireale è un divisore dello zero, se e solo se, $a^2 - b^2 = 0$

Possiamo provare il:

TEOREMA 1 - *Un'algebra associativa, commutativa, unitaria, distributiva è priva di divisori dello zero se e solo se* $\Delta = \alpha^2 + 4\beta \langle 0.$
Dimostrazione - Se risultasse $\Delta \geq 0$ l'equazione $i^2 = \alpha i + \beta$ presenterebbe due radici reali (non necessariamente distinte) per cui si avrebbe:

$$i^2 - \alpha i + \beta = (i - \gamma_i) \cdot (i - \gamma_2) = 0$$

dove, essendo $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ ci sarebbero divisori dello zero.
Viceversa, supponiamo che l'algebra sia integra. In questa ipotesi,

$$(A+iB)(x+iy)=(Ax+B\beta y)+i\left[Bx+(A+B\alpha)y\right]=0$$

implica se $A+iB\neq 0$ che è $x=y=0$ .Segue allora che il sistema deve avere la sola soluzione nulla in x ed y. Ciò implica che si ha:

$$\begin{cases} Ax+B\beta y=0 \\ Bx+(A+B\alpha)y=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A & \beta B \\ B & A+\alpha B \end{vmatrix}\neq 0$$

cioè:

$$A^2+\alpha AB-\beta B^2\neq 0, \forall A,B\in R$$

che implica al variare del trinomio in A,B che è:

$$\alpha^2+4\beta\langle 0.$$

c.v.d.

TEOREMA 2 - *Le algebre doppie associative, commutative, unitarie, distributive che ampliano il sistema dei numeri reali mediante la*

$$i^2=\alpha i+\beta$$

sono isomorfe ai complessi, ai bireali, ai duali a seconda che risulti:

$$\Delta=\alpha^2+4\beta$$

rispettivamente minore, maggiore o uguale a zero.

Dimostrazione

Il prodotto di due elementi di un'algebra doppia unitaria, distributiva, associativa e commutativa è dato da:

$$(a+ib)(c+id)=ac+i(ad+bc)+bdi^2$$

$$i^2 = \alpha i + \beta \quad \text{ovvero} \quad (2i - \alpha)^2 = \Delta$$

Distingueremo i tre casi di $\Delta = 0, \Delta \geq 0, \Delta \geq 0$ e indicheremo nei vari casi la trasformazione della base $\{1, i\}$ in un nuova base $\{1, j\}$ rispetto alla quale si abbia uno dei tre casi fondamentali di numeri duali complessi e bireali.

CASO I Sia $\Delta = 0$, poniamo

$$j = 2i - \alpha$$

Trasformando il generico $a + ib$ in $a + \left[\frac{(j+\alpha)}{2}\right] \cdot b$ si ottiene un'algebra per la quale i calcoli si eseguiranno ponendo $j^2 = 0$, cioè l'algebra data è isomorfa ai numeri duali.

CASO II Sia $\Delta \rangle 0$ introduciamo la trasformazione:

$$j = \frac{1}{\gamma}(2i - \alpha)$$

da cui

$$j^2 = \frac{1}{\gamma^2}(2i - \alpha)^2 = \frac{1}{\gamma^2}\Delta = 1.$$

La trasformazione costruita assicura l'isomorfismo con l'algebra dei numeri iperbolici o circolari.

CASO III Sia $\Delta \langle 0$. Posto $\Delta = -\gamma^2$ introduciamo la trasformazione

$$j = \frac{1}{\gamma}(2i - \alpha)$$

da cui

$$j^2 = \frac{1}{\gamma^2}(2i - \alpha)^2 = \frac{1}{\gamma^2}\Delta = -1.$$

La trasformazione costituita assicura l'isomorfismo con l'algebra dei numeri complessi.

c.v.d.

Operiamo, ora, nei numeri bireali, in modo del tutto analogo a come abbiamo operato in campo complesso. Tenendo conto che $i^2 = 1$, definiamo la norma:

$$\left|z^2\right| = (a+ib)(a-ib) = a^2 - b^2$$

che, con $a = \cosh\vartheta$, $b = senh\,\vartheta$, rappresenta la norma del vettore unitario in quanto verifica la relazione fondamentale delle funzioni iperboliche:

$$\cosh^2\vartheta - \operatorname{senh}^2\vartheta = 1$$

Un generico bireale di norma unitaria si può dunque scrivere nella forma:

$$\cosh\vartheta + i\operatorname{senh}\vartheta$$

e possiamo chiamare tale numero <u>*esponenziale bireale o iperbolico*</u>.
In analogia al caso complesso, per definizione, poniamo

$$\exp h(i\vartheta) = H^{i\vartheta} = \cosh\vartheta + i\operatorname{senh}\vartheta.$$

Il nostro problema è ora quello di studiare le due trasformazioni:

$$Z' = H^{i\vartheta} Z \tag{j}$$
$$Z' = H^{i\vartheta} \overline{Z} \tag{jj}$$

Per (j) risulta:

$$\begin{aligned} Z' = x' + iy' = H^{i\vartheta} Z &= (\cosh\vartheta + i\operatorname{senh}\vartheta)\cdot(x+iy) = \\ &= (x\cosh\vartheta + y\operatorname{senh}\vartheta) + i(x\operatorname{senh}\vartheta + y\cosh\vartheta) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} x' = x\cosh\vartheta + y\operatorname{senh}\vartheta \\ y' = x\operatorname{senh}\vartheta + y\cosh\vartheta \end{cases} \tag{3.2}$$

Le (3.2) rappresentano, dunque, una trasformazione del piano in se stesso. Proviamo che la (1.2) conserva la "norma iperbolica". Ciò segue dalla relazione:

$$\begin{aligned}|Z'|^2 &= \left|x'^2 - y'^2\right| = \left|\left(x^2\cosh^2\vartheta + 2xy\cosh\vartheta\,\mathrm{senh}\,\vartheta + y^2\,\mathrm{senh}^2\vartheta\right)\right| + \\ &-\left(x^2\,\mathrm{senh}^2\vartheta + 2xy\,\mathrm{senh}\,\vartheta\cosh\vartheta + y^2\cosh^2\vartheta\right) = \\ &= \left|x^2\left(\cosh^2\vartheta - \mathrm{senh}^2\vartheta\right) - y^2\left(\cosh^2\vartheta - \mathrm{senh}^2\vartheta\right)\right| = \\ &= \left|x^2 - y^2\right| = |Z|^2.\end{aligned}$$

Nel seguito chiameremo *prodotto* (interno) *iperbolico* di due numeri iperbolici Z *e* Z' la grandezza seguente

$$Z \cdot Z' = (x, y)\cdot\left(x', y'\right) = x\cdot x' - i^2 yy' = xx' - yy'.$$

Dalle (3,2) segue

$$Z\cdot Z' = x\cdot x' - yy' = x^2\cosh\vartheta + xy\,\mathrm{senh}\,\vartheta - xy\,\mathrm{senh}\,\vartheta - y^2\cosh\vartheta =$$
$$= \left(x^2 - y^2\right)\cosh\vartheta.$$

cioè Z *e* Z' individuano due semirette caratterizzanti il settore iperbolico ϑ di coseno iperbolico:

$$\cosh\vartheta = \frac{xx' - yy'}{x^2 - y^2} = \frac{(x,y)\cdot\left(x',y'\right)}{Z^2}$$

Allora:

$$Z' = H^{i\vartheta} Z$$

è una trasformazione che conserva il modulo (o norma) iperbolico ed i settori.

In generale, una trasformazione di questo tipo (che è l'analoga iperbolica di una trasformazione lineare conforme) si può chiamare <u>trasformazione settoriale</u> o <u>trasformazione lineare iperbolica</u>.

Si prova facilmente che se $\cosh\vartheta \neq 0$ e $\operatorname{senh}\vartheta \neq 0$ i punti uniti della traslazione sono l'origine e i punti all'infinito delle rette $x - y = 0$, $x + y = 0$.

Se invece $\operatorname{senh}\vartheta = 0$ (essendo sempre $\cosh\vartheta \neq 0$) si ha una omologia con asse improprio e centro nell'origine.

Lo studio della trasformazione $Z' = H^{i\vartheta} Z$ è del tutto analogo, trattandosi di una composizione di una simmetria ortogonale per una trasformazione iperbolica del tipo descritto sopra.

BIBLIOGRAFIA

1. A. AGOSTINI, *Problemi geometrici elementari e classici, funzioni circolari ed iperboliche*, in: L. Berzolari - G. Vivanti - D. Gigli - Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, Vol. II, Parte I, Hoepli Milano, 1950.
2. G. CIMMINO, *Istituzioni di Analisi Infinitesimale* Vol. I, Patron Bologna, 1953.
3. V. DI MARCELLO - F. EUGENI - G. MATALONI, *Funzioni iperboliche e circolari: un confronto*, su questo stesso volume.