Ratio Mathematica 10
(1996), 67-84

UN MODELLO MATEMATICO PER LA VALUTAZIONE DI FATTIBILITÀ DEI PROGRAMMI INTEGRATI D'INTERVENTO URBANO

Antonio Maturo*, Barbara Ferri*

SUNTO - Si è inteso interpretare in termini matematici un modello per la valutazione dell'effettiva realizzabilità dei Programmi di Riqualificazione e Recupero urbano (L.179/92 e L.493/93).

Tale modello è stato definito assumendo dapprima una serie di categorie di *fattibilità* che riflettono le varie componenti del benessere sociale a cui un progetto urbano deve tendere, poi individuando una serie di *criteri* che, opportunamente ponderati, riflettono le varie esigenze da soddisfare con la realizzazione di un intervento, e infine studiando gli effetti che l'opera progettata - se attuata - produrrà su tale complesso di fattori. La funzione del modello è infatti quella di verificare in che misura un progetto d'intervento urbano può garantire il perseguimento di una gamma di obiettivi di tipo economico, psicologico, fisico, culturale, urbanistico, tecnologico.

Si mostra che l'impostazione del modello in oggetto è riconducibile alla teoria delle *classificazioni fuzzy* .

ABSTRACT - In this paper we have considered a mathematical model to appraise the real feasibility of the last type of urban project. In particular we have tried to find some previsions about the effects produced by that kind of project in the urban contest.

This model is founded on:

---

* Dipartimento di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro, Viale Pindaro 42, 65127, Pescara, ITALY

- some categories of *feasibility*; these classes represent the various aspects of social welfare pursued by an urban project;
- some weighed *objects* that represent the different needs of the community whom the project is intended to;
- a verification about the attainment of aforesaid objects by the tested project.

We have noticed that the statement of this model has common something with the theory of *fuzzy sets*.

1- Posizione del problema

1.1. Il problema urbanistico

La qualità e le dimensioni dei problemi che caratterizzano le grandi conurbazioni testimoniano che la città moderna ha raggiunto una complessità difficilmente governabile.

Il genere e la qualità di infrastrutture necessarie alla vita delle società contemporanee sono notevolmente aumentate rispetto ai decenni passati, così come la congestione funzionale degli ambiti urbani, il disagio ambientale, l'espansione del recupero spontaneo; emerge una nuova domanda di centro storico e affiora l'esigenza del riuso di aree urbane aventi grandi potenzialità di incidenza urbanistica, vedendo nel riuso una risposta alla domanda di qualità della città. A questi nuovi fenomeni legati alla trasformazione del territorio si aggiunga, da una parte la necessità di rendere "trasparenti ed equi" i processi di decisione, dall'altra l'esigenza di un più mirato impiego delle risorse per il continuo ridursi di finanziamenti pubblici .

A fronte di tale complessità di fattori si ritiene ormai irrinunciabile il ricorso a nuovi strumenti di governo del territorio, in modo da travalicare la rigidità del piano regolatore generale che tende a fissare lo sviluppo della città in un'immagine statica e priva di indicazioni sulla fattibilità degli interventi in esso previsti.

Si avverte dunque l'esigenza di organiche e vincolanti procedure di valutazione che consentano di giudicare la fattibilità degli interventi sin dalle prime fasi di formazione del progetto. Queste stesse fasi sono state definite dalla legge Merloni bis del giugno '95 col nome di *"progetto preliminare"* che, secondo tale norma, deve consistere in schemi grafici volti a:

- definire il quadro delle esigenze da soddisfare;
- individuare le caratteristiche spaziali, tipologiche, funzionali e tecnologiche dei lavori da realizzare.

La legge prescrive che a questo stadio si effettuino le verifiche della *fattibilità*, l'esame dei profili di impatto ambientale, l'analisi della conformità agli strumenti urbanistici, la valutazione indicativa della spesa .

E' soprattutto nella fase iniziale che diventa strategicamente rilevante raggiungere i "punti di equilibrio" fra *obiettivi, risorse, vincoli* che possono compromettere l'esito dell'intervento.

L'attuale necessità concreta è di individuare, prevedere, verificare ogni rapporto oggetto-contesto, comprendere la totalità dei fattori implicati, in maniera da *controllare al meglio la complessità del processo progettuale.*

L'obiettivo del progettista, allora, deve essere quello di conoscere, in una specie di simulazione tipo realtà virtuale, gli effetti che l'idea progettuale, se concretizzata attraverso la realizzazione dell'opera, produrrà. In tal senso, per le opere di interesse collettivo, si ritiene che l'architetto moderno *non possa più limitarsi alla estrinsecazione grafica* delle sole sue idee, ma debba sentirsi chiamato a tradurre in opere il variegato complesso di richieste, interessi, fabbisogni e attese della collettività, nonchè più in generale, il rispetto di vincoli preesistenti.

A tal fine il progettista non potrà più lavorare nel ristretto ambito del suo studio, ma dovrà essere parallelamente coadiuvato da una organizzazione che, attraverso forme di indagine scientificamente comprovate, gli permetta il controllo in tempo reale degli effetti della sua progettazione. In tal modo l'intero processo progettuale si configura come "processo decisionale in vista di alcuni obiettivi"; esso è dunque notevolmente più ampio ed impegnativo di quello connotato dalla graficità.

1.2. I programmi integrati

La difficoltà gestionale degli interventi di recupero ha spinto i diversi soggetti istituzionali alla ricerca di nuove soluzioni che affrontassero la complessità del problema inerente la riqualificazione urbana e la valorizzazione ambientale e culturale degli insediamenti.

La più recente tipologia di "progetto urbano" è rappresentata dai Programmi di Riqualificazione Urbana introdotti dalla L.179/92 e dai Programmi di Recupero Urbano della L.493/93. Tali strumenti sono l'espressione di un nuovo modo di intendere i progetti urbani poichè articolano le previsioni di piano in azioni urbanistiche di differente complessità, mettendo in gioco il ruolo di tutti gli "attori urbani".

I caratteri dei programmi suddetti si avvicinano molto a quelli di una progettazione "esecutiva" di un ambito urbano.

Il legislatore ha inteso, con la 179/92, affrontare un insieme di questioni con lo scopo esplicito di migliorare vari aspetti della gestione urbana: accanto ai temi della programmazione, dei contributi, delle locazioni e del recupero ha preso forma il tema centrale della riqualificazione urbana.

Tra i caratteri dei Programmi Integrati si trova, infatti, quello della necessaria *dimensione "strategica"*, ossia della grande incidenza sulla riorganizzazione urbana, al fine di accrescere le dimensioni funzionali e relazionali dei luoghi urbani attraverso interventi di "ricucitura"; l'interesse non è più solo per gli alloggi, ma per i servizi, le infrastrutture, le attività produttive e commerciali.

Le caratteristiche che definiscono un Programma Integrato sono:

a) intersettorialità di funzioni;
b) pluralità delle tipologie d'intervento: dalla manutenzione alla nuova edificazione, dal restauro alla ristrutturazione, dagli interventi edilizi a quelli urbanizzativi;
c) pluralità di operatori;
d) qualità urbana auspicata;
e) modifica del ruolo del PRG, posto come norma-quadro, quindi come strumento di direttive e di orientamento più che di vincolo;
f) modifica del ruolo dell'ente pubblico che, da motore e decisore unico, passa ad un ruolo più democratico di garante del pubblico interesse, nonchè di controllo;
g) costituzione di una forma societaria mista fra soggetti pubblici e privati, al fine di attrarre una pluralità di risorse;
h) presenza di uno *studio di fattibilità* tecnico-economica degli interventi, al fine di rendere più efficaci i finanziamenti pubblici;
i) "complessità", per le difficoltà imposte dai fatti urbani. Anche il quadro procedurale dei P.I. è complesso : si tratta di rendere "trasparente" la modalità di erogazione e le destinazioni di un consistente flusso di denaro pubblico, ma si tratta anche di investire sia gli aspetti di *gestione del territorio* (laddove si incide sulla strumentazione urbanistica), sia quelli di *programmazione* e di *spesa* , sia quelli di tipo *contrattuale* (si prevedono nuove convenzioni tutte da sperimentare: accordi di programma, atti d'obbligo, mandati, conferenze di servizi,....)

1.3. Caratteristiche qualitative del modello

Si è voluto formulare uno schema oggettivamente valido per affrontare la generalità dei casi relativi al tema del recupero e della riqualificazione urbana.

La funzione del modello è quella di dirigere le osservazioni sul contesto del progetto, controllare la validità di certe scelte, formulare ipotesi di intervento "ottimale" o comunque soddisfacente rispetto a determinati parametri di giudizio. Il modello proposto è organizzato in modo da poter essere strumento di valutazione "in itinere" del progetto, per permettere ai progettisti di perseguire gli obiettivi più importanti durante la fase progettuale stessa.

Il modello è basato sui concetti di *fattibilità del progetto* e di *obiettivi, o criteri,* che si intendono perseguire con la realizzazione dell'opera.

Si è ritenuto opportuno fare un po' di chiarezza su cosa significhi "studiare la fattibilità" di un progetto, poichè a tale espressione non corrisponde tuttora una definizione universalmente accettata.

L'intento di base dello studio di fattibilità del progetto deve essere quello di verificare anticipatamente le convergenze delle forze in campo, tenendo conto delle reali condizioni oggettive del contesto d'intervento. Lo studio di fattibilità può essere identificato come "guida", come "schema procedurale" o "griglia metodologica" per identificare, comprendere e descrivere i vari esiti ed effetti che potrebbero derivare dalla realizzazione di un progetto, analizzando tutte le dimensioni suscettibili d'impatto. Così, ad una fase di "analisi propedeutica" al progetto, dovrebbe far seguito una fase più mirata, tesa ad elevare la concretezza dello studio e a meglio valutare l'intervento in termini di qualità urbana e resa socio-economica, attraverso la costituzione di un *modello* .

Tale modello si fonda sul principio che lo studio di fattibilità dei programmi di recupero e riqualificazione urbana si configurino come scelte "complesse" in cui è necessario perseguire contemporaneamente più obiettivi eterogenei e talvolta conflittuali. Si è ritenuto perciò di ricorrere alle tecniche di valutazione *multicriterio* che consentono di rendere lo studio "onnicomprensivo", considerando pure le dimensioni "extraeconomiche" di un intervento, nonchè le ampie ripercussioni che possono aversi anche sugli individui non direttamente interessati dall'opera progettata. Le *esternalità* e gli *intangibili* sono infatti particolarmente rilevanti negli interventi di recupero e riqualificazione urbana.

Per esprimere tale circostanza è parso necessario assumere nel modello una certa serie di *fattibilità* che riflettono ed esprimono tutte le componenti in gioco, e una certa serie di *obiettivi* - o *criteri* - che, in seno a ciascuna categoria di fattibilità, riflettono ed esprimono i bisogni o le richieste della collettività.

Sia le fattibilità che i criteri possono essere *ponderati* opportunamente per tener conto della importanza riconosciuta alle diverse esigenze. In tal caso il peso di ciascuna fattibilità ne caratterizza l'importanza relativa nell'ambito di una prefigurata tipologia progettuale d'intervento in cui siano state prefissate determinate priorità. I pesi dei criteri rappresentano invece le misure del grado di importanza dei vari obiettivi. L'attribuzione dei pesi deve avvenire sulla base del parere di tutti i soggetti del piano: promotori, attivi, o semplicemente coinvolti.

La valutazione diventa allora *l'operazione con cui si riesce ad esprimere il grado fino al quale i diversi obiettivi sono soddisfatti dalle caratteristiche del progetto.*

In un programma di riqualificazione urbana gli obiettivi si riferiscono oltre che alla eliminazione del degrado sociale ed economico di un'area, anche al soddisfacimento di esigenze psicologiche, di tutela dei valori storico-artistici, di tutela delle qualità estetico-visive. La formazione di un programma d'intervento urbano deve configurarsi come processo di sintesi il più possibile *"globale"* delle diverse componenti in gioco.

A tal fine sono state considerate sette categorie di fattibilità:

1. F. AMBIENTALE, intesa come valutazione degli effetti del progetto sull'ambiente naturale (fisico e paesaggistico) e sull'ambiente costruito. A tale riguardo bisogna considerare le caratteristiche morfologiche del sito d'intervento, le caratteristiche del terreno in senso fisico-meccanico, geologico, idrogeologico, pedologico, gli elementi caratterizzanti il sistema urbano, gli elementi fisici condizionanti gli interventi sulla zona.
2. F. ESTETICO-CULTURALE, intesa come valutazione degli effetti del progetto sulla tutela degli interessi storici, artistici, archeologici. Aspetto sostanziale di tale fattibilità è l'analisi di "come" l'intervento si rapporta alle preesistenze artificiali, alla loro importanza storica e architettonica, al fine di garantire il rispetto dei valori (urbani e artistici) suddetti. Elementi da sottoporre allo studio sono: aspetti culturali locali, valori simbolici del sito. La lettura di "costruzione storica" dell'ambiente è condotta per far sì che l'intervento si concili con la cultura e la storia che hanno dato forma e senso alla città.
3. F. ECONOMICA, intesa come valutazione tesa ad accertare che l'intervento contribuisca al miglioramento della base economica urbana. Utilizzando il miglioramento dei valori funzionali dei manufatti e della loro qualità fisica è possibile determinare impatti positivi sulle attività, stimolando la localizzazione di nuove iniziative. Questo significa che l'attività di conservazione non deve essere solo finalizzata al miglioramento dello scenario fisico.
4. F. FINANZIARIA, intesa come verifica della provvista finanziaria disponibile per la realizzazione del programma, attraverso l'individuazione di tutti i canali finanziari attivabili.
5. F. TECNICA, intesa come studio degli effetti del progetto su alcune componenti tecniche: vincoli tecnico-costruttivi, vincoli derivanti dalla strumentazione urbanistica, problematiche infrastrutturali, rapporti funzionali e strutturali tra l'opera e il contesto urbano, difficoltà eventuali relative alla organizzazione del cantiere.
6. F. SOCIALE, riguarda il perseguimento di obiettivi che investono i soggetti direttamente interessati dal progetto. A tal fine bisogna considerare gli eventuali effetti di risanamento urbano complessivo: il miglioramento della qualità insediativa, l'eliminazione del degrado sociale, l'incremento del tasso occupazionale, la tutela delle categorie deboli, eventuali domande non soddisfatte

7. F. PROCEDURALE, volta a considerare sostanzialmente tre aspetti dell'intervento: l'*aspetto regolamentare*, ossia la congruenza del programma rispetto alle prescrizioni vigenti; l'*aspetto contrattuale*, relativo alla compresenza di differenti attori legati da "contratti"; l'*aspetto operativo*, relativo alle modalità di realizzazione dell'opera (disponibilità degli immobili, affidamento dei lavori, aspetti gestionali).

Per ognuna delle sette fattibilità, si valuta l' "efficacia" del progetto relativamente ad ogni criterio in essa compreso; si individua cioè il grado con cui il progetto soddisfa ciascun obiettivo rispetto alla fattibilità considerata.

Si è ritenuto inoltre assegnare ad alcuni criteri l'etichetta di "essenzialità" e ad altri di "secondarietà". La differenziazione suddetta, effettuata in base alla importanza prioritaria che ad un certo criterio viene assegnata dal complesso di normative sui P.I., è dettata dalla esigenza di imporre che il progetto persegua i criteri essenziali in misura almeno sufficiente ed è stata ottenuta assegnando opportunamente dei pesi.

Si sono poi introdotti nell'insieme dei progetti una relazione di *Preordine* ed una funzione detta *Valutazione Numerica* o *Utilità Globale* dei progetti.

Attraverso l'assunzione di una *matrice di soglia* e di due valori detti rispettivamente *valore scalare di soglia* e *valore di apprezzamento*, da confrontare, rispettivamente, con la matrice che individua i gradi con cui il progetto soddisfa gli obiettivi rispetto alle fattibilità considerate e con il valore dell'Utilità Globale del progetto esaminato, sarà possibile stabilire in che misura il progetto risulta fattibile.

Viene infine introdotto il concetto di progetto *quasi fattibile ma molto valido.*

2 - Un modello matematico di "ricoprimento fuzzy" per la valutazione di un progetto

2.1. Ricoprimenti fuzzy di un insieme Ω e relazioni di preordine fra progetti

Una *proprietà* P *in senso usuale* o *proprietà hard* o *proprietà crisp* su un insieme Ω si può descrivere come un' affermazione o *vera* o *falsa* per ogni oggetto $x \in \Omega$. Poniamo $P(x) = 1$ se per x la proprietà è vera e $P(x) = 0$ se per x la proprietà è falsa.

In altre parole P può essere considerata come una funzione definita in Ω ed a valori in $\{0,1\}$. I sottoinsiemi di Ω

$$P_0 = \{x \in \Omega : P(x) = 0\}, \quad P_1 = \{x \in \Omega : P(x) = 1\}$$

si chiamano, rispettivamente, *parte falsa* e *parte vera* di Ω determinate dalla proprietà P.

Una *proprietà* P *sfumata* o *sfocata* o *fuzzy* su un insieme Ω si può descrivere come un' affermazione o *vera* o *falsa* o *parzialmente vera* per ogni oggetto $x \in \Omega$. Poniamo $P(x) = 1$ se per x la proprietà è vera, $P(x) = 0$ se per x la proprietà è falsa e $P(x) = a$, con $0<a<1$, se la proprietà è parzialmente vera e abbiamo una misura del *grado di verità* della proprietà data dal numero a.

In altre parole P può essere considerata come una funzione definita in Ω ed a valori in [0,1]. Per ogni $a \in [0,1]$, essa determina il sottoinsieme di Ω

$$P_a = \{x \in \Omega : P(x) = a\},$$

detto *parte di livello* a determinata da P.

L'unione dei sottoinsiemi P_a, con $a \in (0,1)$ si chiama *parte sfumata* o *sfocata* o *fuzzy* determinata dalla proprietà P. Essa è vuota se e solo se P è una proprietà hard.

In tale ordine di idee diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1. Diciamo *fuzzy set* o *insieme sfocato* con insieme universo Ω ogni funzione

$$f : \Omega \rightarrow [0,1]. \tag{1}$$

Per ogni $x \in \Omega$, f(x) si dice *grado di appartenenza* di x ad f.

I sottoinsiemi di Ω, $V(f) = f^{-1}(1)$, $F(f) = f^{-1}(0)$, $I(f) = f^{-1}((0,1))$, si dicono, rispettivamente, *parte vera*, *parte falsa* e *parte sfumata* di f.

Sia D la famiglia dei sottoinsiemi finiti o numerabili di Ω. Diciamo *cardinalità* di f il numero

$$\text{card}(f) = \sup\{\sum_{x \in I} f(x), I \in D\}. \tag{2}$$

Un fuzzy set si dice *hard set* o *insieme usuale* o *crisp set* se risulta $f(\Omega) \subseteq \{0,1\}$, ossia se $I(f) = \varnothing$.

Osservazione 2. Un fuzzy set è individuato dalla coppia formata da V(f) e dalla famiglia $\{f^{-1}(a)\}_{a \in (0,1)}$. Se il fuzzy set è un crisp set allora esso è individuato semplicemente dall'insieme V(f) ed in pratica viene identificato con esso.

Definizione 3. Sia $F = \{f_h\}_{h\in H}$ una famiglia di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H. Sia T la famiglia dei sottoinsiemi finiti o numerabili di H. Diciamo *grado di appartenenza* di x ad F il numero

$$gr(x) = \sup \{ \sum_{h\in J} f_h(x),\ J\in T \}. \tag{3}$$

Corollario 4. Supponiamo che sia H che Ω siano finiti o numerabili. Allora risulta:

$$\forall\ x \in \Omega, \quad gr(x) = \sum_{h\in H} f_h(x)\ ; \tag{4}$$

$$\forall\ h \in H, \quad card(f_h) = \sum_{x\in\Omega} f_h(x)\ ; \tag{5}$$

$$\sum_{x\in\Omega} gr(x) = \sum_{h\in H} card(f_h). \tag{6}$$

Definizione 5. Sia H un insieme e sia $F = \{f_h\}_{h\in H}$ una famiglia di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H.

Gli insiemi $DR(F) = \{x\in\Omega: gr(x)>0\}$ e $FR(F) = \{x\in\Omega: gr(x)\geq 1\}$ si dicono, rispettivamente, *parte debolmente ricoperta* di Ω e *parte fortemente ricoperta* di Ω . La F si dice *fuzzy ricoprimento parziale* di Ω se $DR(F) \subset \Omega$, si dice *fuzzy ricoprimento debole* se $DR(F) = \Omega$, si dice *fuzzy ricoprimento forte* se $FR(F) = \Omega$.

Definizione 6. Sia H un insieme e sia $F = \{f_h\}_{h\in H}$ una famiglia di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H.

Diciamo che F è una *fuzzy partizione parziale, debole o forte* di Ω se è, rispettivamente, un *fuzzy ricoprimento parziale, debole* o *forte* di Ω ed inoltre valgono le seguenti proprietà

(P1) $\forall h\in H,\ \exists\ x\in\Omega : f_h(x) > 0;$

(P2D) $\forall x\in\Omega,\ gr(x) \leq 1.$

Corollario 7. La F è una *fuzzy partizione forte* di Ω se e solo se valgono la (P1) e la

(P2F) $\forall x\in\Omega,\ gr(x) = 1.$

Corollario 8. Siano H ed Ω due insiemi finiti o numerabili e sia $F = \{f_h\}_{h \in H}$ una famiglia di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H. Allora F è una fuzzy partizione forte di Ω se e solo se

(P1A) $$\forall\ h \in H, \quad \sum_{x \in \Omega} f_h(x) > 0;$$

(P2A) $$\forall\ x \in \Omega, \quad \sum_{h \in H} f_h(x) = 1$$

Definizione 9. Sia f un fuzzy set con insieme universo Ω . Per ogni fuzzy set g con insieme universo Ω il prodotto

$$f \bullet g : x \in \Omega \rightarrow f(x)\, g(x) \tag{7}$$

si dice *parte* di f *trasmessa* da g ed il prodotto

$$f \bullet (1-g) : x \in \Omega \rightarrow f(x)\, [\, 1 - g(x)\,] \tag{8}$$

si dice *parte* di f *assorbita* da g. La coppia $(g, \bullet)$ si dice *filtro* rispetto ad f.

Definizione 10. Sia $F = \{f_h\}_{h \in H}$ una famiglia di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H. Una famiglia $G = \{g_h\}_{h \in H}$ di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H si dice *filtro* rispetto a F se, $\forall h \in H$, g_h è un filtro rispetto a f_h.

Si dice *parte* di F *trasmessa* da G la famiglia

$$T(F,G) = \{f_h \bullet g_h\}_{h \in H} \tag{9}$$

e si dice *parte* di F *assorbita* da G la famiglia

$$A(F,G) = \{f_h \bullet (1 - g_h)\}_{h \in H}. \tag{10}$$

Definizione 11. Sia $F^I = \{F^\alpha\}_{\alpha \in I}$ un insieme, con insieme di indici I, di famiglie di fuzzy set $F^\alpha = \{f_h^\alpha\}_{h \in H}$ con insieme universo Ω e insieme di indici H e sia $S = \{s_h\}_{h \in H}$ una una famiglia di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H.

Chiamiamo *operatore di soglia* definito in F^I con *matrice di soglia* S, la terna (F^I, S, φ) dove φ è la famiglia di funzioni $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in I}$ con φ^α definita in $\Omega \times H$ e tale che, $\forall$ (x, h) $\in \Omega \times H$, $\varphi^\alpha(x, h) = 1$ se $f_h^\alpha(x) \geq s_h(x)$ e $\varphi^\alpha(x, h) = 0$ se $f_h^\alpha(x) < s_h(x)$.

Supponiamo da ora in poi che sia H che Ω siano finiti. Indichiamo con *m* il numero di elementi di Ω e con *n* il numero di elementi di H.

Definizione 12. Sia $F = \{f_h\}_{h\in H}$ una famiglia di fuzzy set con insieme universo Ω e insieme di indici H . Si dice *sistema di pesi relativi* su Ω ogni fuzzy set π con insieme universo Ω e cardinalità uguale ad 1. Si dice *sistema di pesi relativi* su F ogni fuzzy set λ con insieme universo H e cardinalità uguale ad 1.

Definizione 13. Sia $F^I = \{F^\alpha\}_{\alpha\in I}$ un insieme, con insieme di indici I, di famiglie di fuzzy set $F^\alpha = \{f_h^\alpha\}_{h\in H}$ con insieme universo Ω e insieme di indici H e siano $S = \{s_h\}_{h\in H}$, $T = \{t_h\}_{h\in H}$ due famiglie di fuzzy set tali che, $\forall x\in\Omega$, $\forall h\in H$, $\forall\alpha\in I$,

$$\max\{s_h(x), f_h^\alpha(x)\} \leq t_h(x). \tag{11}$$

Sia inoltre $\lambda = \{\lambda_h\}_{h\in H}$ un sistema di pesi relativi su H e $\pi = \{\pi_x\}_{x\in\Omega}$ un sistema di pesi relativi su Ω.

Chiamiamo *struttura di progetti* con tetto T e soglia S la sestupla $(F^I, S, \varphi, T, \lambda, \pi)$, con (F^I, S, φ) operatore di soglia definito in F^I e matrice di soglia S. Chiamiamo *progetti* gli elementi di F^I.

Chiamiamo inoltre:

(a) *media* di F^α il numero $m(F^\alpha) = \sum_{h\in H}\sum_{x\in\Omega} \pi_x\lambda_h f^\alpha_h(x)$, $\forall\alpha\in I$;

(b) *media di soglia* il numero $m(S) = \sum_{h\in H}\sum_{x\in\Omega} \pi_x\lambda_h s_h(x)$;

(c) *media di tetto* il numero $m(T) = \sum_{h\in H}\sum_{x\in\Omega} \pi_x\lambda_h t_h(x)$;

(d) *carenza media* di F^α rispetto alla soglia S il numero

$$c_s(F^\alpha) = \sum_{f_h^\alpha(x)\leq s_h(x)} \pi_x\lambda_h (s_h(x) - f_h^\alpha(x)); \tag{12}$$

(e) *eccedenza media* di F_α rispetto alla soglia S il numero

$$e_s(F^\alpha) = \sum_{f_h^\alpha(x)\geq s_h(x)} \pi_x\lambda_h (f_h^\alpha(x) - s_h(x)); \tag{13}$$

(f) *soddisfacimento scalare di* F^α rispetto a S il numero

$$d_s(F^\alpha) = m\,(F^\alpha) - m\,(S)\,.$$

Osservazione 14. Ogni progetto F^α si può rappresentare come punto $P(F^\alpha)= (e_s(F^\alpha),\ c_s(F^\alpha))$, del piano (**e**, **c**), dove **e** indica l'eccedenza e **c** la carenza di F^α. Precisamente, essendo

$$0 \le e_s(F^\alpha) \le m\,(T) - m\,(S), \quad 0 \le c_s(F^\alpha) \le m(S), \tag{14}$$

$P(F^\alpha)$ appartiene al rettangolo $R = [0,\ m(T) - m(S)\ ] \times [\ 0,\ \ m(S)\ ]$.

Definizione 15. Diciamo che due progetti sono (e,c)-*equivalenti* se sono rappresentati da uno stesso punto.

Diciamo che due progetti sono *scalarmente equivalenti* se hanno lo stesso soddisfacimento scalare.

Notiamo che risulta $e_s(F^\alpha) - c_s(F^\alpha) = d_s(F^\alpha)$. Segue la

Proposizione 16. Due progetti sono scalarmente equivalenti se e solo se sono rappresentati da punti che si trovano su una stessa retta parallela alla bisettrice degli assi.

Definizione 17. Dati due progetti F^α e F^β , $\alpha\in I$, $\beta\in I$, diciamo che F^α è (e,c)-*suvvalente* rispetto a F^β ovvero che F^β è (e,c)-*prevalente* rispetto a F^α e scriviamo $F^\alpha \le\cdot F^\beta$ se risulta $e_s(F^\alpha) \le e_s(F^\beta)$ e $c_s(F^\alpha) \ge c_s(F^\beta)$.

Supponiamo, da ora in poi, che F^I sia finito e che ad esso appartengano un progetto F^m, detto *massimale* tale che $F^\alpha \le\cdot F^m$, $\forall\alpha\in I$, ed un progetto F^0, detto *minimale* tale che $F^0 \le\cdot F^\alpha$, $\forall\alpha\in I$.

Si può convenire, ad esempio, di assumere come massimale un *progetto ideale* F^m tale che $e_s(F^m) = m(T)-m(S)$, $c_s(F^m) = 0$.

Si può pensare inoltre di assumere come minimale un *progetto nullo* F^0 con $e_s(F^0) = 0$, $c_s(F^0) = m(S)$.

Si consideri la funzione

$$P : F^\alpha \in F^I \to P(F^\alpha) \in R\,. \tag{15}$$

Poniamo, $\forall\ P_1\,(e_1, c_1),\ P_2\,(e_2, c_2) \in R$,

$$P_1 \le P_2 \Leftrightarrow (e_1 \le e_2 \ \text{ e } \ c_1 \ge c_2)\,. \tag{16}$$

La $\leq$ è una relazione d'ordine in R e risulta

$$F^{\alpha} \leq\cdot F^{\beta} \Leftrightarrow P(F^{\alpha}) \leq P(F^{\beta}). \qquad (17)$$

Indichiamo con R* l'immagine di F^I tramite la P e consideriamo la restrizione di $\leq$ ad R*.

Per la (17) risulta $P(F^0) \leq P(F^{\alpha}) \leq P(F^m)$ per ogni progetto $F^{\alpha} \in F^I$. Allora, dati due progetti F^{α} e F^{β}, gli insiemi

$$M_1=\{F^i \in F^I : P(F^i) \leq P(F^{\alpha}) \text{ e } P(F^i) \leq P(F^{\beta})\},$$
$$M_2=\{F^i \in F^I : P(F^{\alpha}) \leq P(F^i) \text{ e } P(F^{\beta}) \leq P(F^i)\},$$

sono non vuoti, poichè $F^0 \in M_1$ e $F^m \in M_2$.

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 18. Per ogni coppia F^{α} e F^{β} di progetti appartenenti ad F^I, siano

$P(F^{\alpha}) \wedge P(F^{\beta})$ l'insieme dei minoranti massimali di $P(F^{\alpha})$ e $P(F^{\beta})$,

$P(F^{\alpha}) \vee P(F^{\beta})$ l'insieme dei maggioranti minimali di $P(F^{\alpha})$ e $P(F^{\beta})$.

Diciamo *iperprodotto* $\wedge$ in R* la legge che ad ogni coppia $(P(F^{\alpha}), P(F^{\beta}))$ di elementi di R* associa $P(F^{\alpha}) \wedge P(F^{\beta})$ e diciamo *iperprodotto* $\vee$ in R* la legge che ad ogni $(P(F^{\alpha}), P(F^{\beta})) \in R^* \times R^*$ associa $P(F^{\alpha}) \vee P(F^{\beta})$.

Definizione 19. Si dice *iperprodotto* $\wedge$ in F^I la legge che ad ogni coppia $(F^{\alpha}, F^{\beta}) \in F^I \times F^I$ associa $P^{-1}(P(F^{\alpha}) \wedge P(F^{\beta}))$ e si dice *iperprodotto* $\vee$ in F^I la legge che ad ogni $(F^{\alpha}, F^{\beta}) \in F^I \times F^I$ associa $P^{-1}(P(F^{\alpha}) \vee P(F^{\beta}))$.

Teorema 20. $(F^I, \wedge)$ soddisfa alle seguenti proprietà

$(\wedge 1)$ $\forall F \in F^{\alpha} \wedge F^{\beta}$, $F \leq\cdot F^{\alpha}$ e $F \leq\cdot F^{\beta}$;

$(\wedge 2)$ $\forall F \in F^I$, $(F \leq\cdot F^{\alpha}, F \leq\cdot F^{\beta}) \Rightarrow \exists G \in F^{\alpha} \wedge F^{\beta}: F \leq\cdot G$.

Teorema 21. $(F^I, \vee)$ soddisfa alle seguenti proprietà

$(\vee 1)$ $\forall F \in F^{\alpha} \vee F^{\beta}$, $F^{\alpha} \leq\cdot F$ e $F^{\beta} \leq\cdot F$;

$(\vee 2)$ $\forall F \in F^I$, $(F^{\alpha} \leq\cdot F, F^{\beta} \leq\cdot F) \Rightarrow \exists G \in F^{\alpha} \vee F^{\beta}: G \leq\cdot F$.

2.2. Il nostro modello come partizione fuzzy con "oggetti pesati"

Indichiamo con $\Omega = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$ l'insieme delle fattibilità e con $C = \{ c_1, c_2, \ldots, c_n \}$ quello dei criteri, o obiettivi, che possono essere perseguiti dalle fattibilità stesse.

Per ogni $x_i \in \Omega$ e per ogni $c_j \in C$ indichiamo con p_{ij} un numero appartenente all'intervallo [0,1] che rappresenta il *grado di importanza relativa* del criterio c_j rispetto alla fattibilità x_i, detto anche *grado di appartenenza* di x_i a c_j o anche *misura* di c_j rispetto ad x_i.

Ogni criterio c_i può essere considerato come un fuzzy set con insieme universo Ω e viene rappresentato dal vettore colonna

$$\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{mj} \end{bmatrix}$$

Sia H = { 1, 2, ..., n }. La famiglia dei fuzzy set $\{c_j\}_{j\in H}$ con insieme universo Ω è allora rappresentato dalla seguente matrice detta *matrice caratteristica del modello matematico* o *matrice di fattibilità*.

$$M = \begin{array}{c|ccccc|} & c_1 & c_2 \ldots\ldots & c_j & \ldots\ldots & c_n \\ \hline x_1 & p_{11} & p_{12} \ldots\ldots & p_{1j} & \ldots\ldots & p_{1n} \\ x_2 & & & & & \\ x_i & \ldots\ldots & \ldots\ldots & p_{ij} & \ldots\ldots & \\ x_m & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \hline \end{array}$$

Dal corollario 8 di 2.1. seguono le relazioni

$$\forall\, x_i \in \Omega\,,\ \ gr\,(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}; \tag{18}$$

$$\forall\, c_j \in C\,,\ card\,(c_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}. \tag{19}$$

Chiamiamo *cardinalità* di C il numero

$$card\,(C) = \sum_{j=1}^{n} card\,(c_j). \tag{20}$$

Dalla (6) si ricava che

$$\text{card}\,(C) = \sum_{i=1}^{m} gr(x_i). \tag{21}$$

La condizione $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ sulle righe della matrice di fattibilità equivale alla (PF2) per cui, dato che ogni criterio ha cardinalità positiva, la famiglia C risulta essere una partizione forte di Ω.

Dato un progetto F, per ogni $x_i \in \Omega$ e per ogni $c_j \in C$ indichiamo con e_{ij} un numero appartenente all'intervallo [0, 1] che rappresenta il *grado di efficacia* con cui il progetto F raggiunge l'obiettivo c_j relativamente alla fattibilità x_i.

Per ogni fissato criterio c_j l'insieme dei gradi di efficacia può essere considerato come un fuzzy set con insieme universo Ω e viene rappresentato dal vettore colonna

$$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ \vdots \\ e_{mj} \end{bmatrix}$$

La famiglia dei fuzzy set $\{e_j\}_{j \in H}$ con insieme universo Ω è allora rappresentato dalla seguente matrice

$$E = \begin{array}{c|cccccc|} & c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_n \\ \hline x_1 & e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1j} & \cdots & e_{1n} \\ x_2 & & & & & & \\ x_i & \cdots & & \cdots & e_{ij} & \cdots & \\ x_m & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ \hline \end{array}$$

detta *matrice di efficacia del progetto*. Essa dipende dalle caratteristiche dello specifico progetto esaminato.

La matrice E, considerata come insieme dei suoi vettori colonna $\{e_j\}_{j \in H}$ si può considerare come un filtro rispetto alla matrice M, anch'essa presa come insieme dei suoi vettori colonna $\{c_j\}_{j \in H}$.

La parte di M trasmessa da E, $T(M, E) = \{c_h \cdot e_h\}_{h\in H}$ rappresenta i *gradi di appartenenza* dei criteri c_j rispetto alle fattibilità x_i filtrati dal progetto F.

La parte di M assorbita da E, $A(M, E)=\{c_h \cdot (1-e_h)\}_{h\in H}$ rappresenta le *perdite* dei gradi di appartenenza dei criteri c_j rispetto alle fattibilità x_i con il progetto F.

In seguito rappresentiamo il progetto F con la sua matrice T(M,E), vista come insieme dei suoi vettori colonna.

Assegniamo, in base a criteri determinati da esperti, un sistema di pesi $\pi = \{\pi_j\}_{j\in H}$ ai criteri, un sistema di pesi $\lambda = \{\lambda_x\}_{x\in\Omega}$ alle fattibilità ed una matrice di soglia $S = \{s_j\}_{j\in H}$, con

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ \vdots \\ s_{mj} \end{bmatrix}$$

vettore di soglia associato al criterio c_j, tale che, $\forall i\in\{1, ..., m\}, \forall j\in\{1, ..., n\}$, risulti $s_{ij} \leq p_{ij}$.

Ogni s_{ij} rappresenta il minimo grado accettabile in cui il criterio c_j deve essere soddisfatto rispetto alle fattibilità x_i.

Se F^I è l'insieme dei progetti considerati viene allora ad essere definito un operatore di soglia (F^I, S, φ) ed una struttura di progetti (F^I, S, φ, T, λ, π), con T uguale alla matrice M di fattibilità considerata come insieme dei suoi vettori colonna.

Si possono allora prendere in considerazione tutti i concetti introdotti nella definizione 13 e nelle definizioni e teoremi successivi e rappresentare i progetti come punti del piano (e,c) .

In particolare, due progetti F^α e F^β risultano essere (e,c)-equivalenti se $P(F^\alpha) = P(F^\beta)$ e la (17) fornisce una relazione di preordine nell'insieme F^I dei progetti.

2.3. Valutazioni numeriche e classificazione dei progetti

Consideriamo una struttura di progetti (F^I, S, φ, T, λ, π) utilizzando le notazioni del paragrafo precedente, in particolare della definizione 13 e conseguenze.

Una prima valutazione numerica di un progetto F^α è data dal suo soddisfacimento scalare $d_s(F^\alpha)$. Poichè risulta

$$F^\alpha \leq\cdot F^\beta \Rightarrow d_s(F^\alpha) \leq d_s(F^\beta) \tag{22}$$

tale valutazione numerica è compatibile con la relazione di preordine $\leq\cdot$.

Spesso si assume la condizione

$$c_s\,(F^{\alpha}) = 0\,, \tag{23}$$

ossia che per ogni coppia $(x_i\,,\,c_j)$ risulti $f^{\alpha}_{ij} \geq s_{ij}$.

In tal caso è $d_s(F^{\alpha}) = e_s(F^{\alpha})$ e risulta

$$F^{\alpha} \leq\cdot F^{\beta} \Leftrightarrow d_s(F^{\alpha}) \leq d_s(F^{\beta}). \tag{24}$$

La relazione di preordine in F^I data dalla d_s coincide con la $\leq\cdot$.

Noi riteniamo, tuttavia, che si debbano prevedere condizioni più elastiche della (23), basate sull'idea che un progetto F^{α} possa avere un valore rilevante anche se non supera la soglia rispetto a qualche coppia fattibilità - criterio, ossia se esistono coppie $(x_i\,,\,c_j)$ tali che $f^{\alpha}_{ij} < s_{ij}$, e che in tal caso sia opportuno in qualche modo recuperarlo facendo qualche modifica al progetto o vedendo se è possibile abbassare i valori di soglia con approfondite consultazioni con esperti o politici.

Riteniamo pertanto che si debba individuare un valore opportuno $h>0$ e considerare oltre alla (23) la condizione più debole

$$c_s\,(F^{\alpha}) \leq h\,. \tag{25}$$

Inoltre pensiamo che si debba valutare scalarmente il progetto tramite una funzione reale v , definita in F^I tale che

$$F^{\alpha} \leq\cdot F^{\beta} \Rightarrow v\,(F^{\alpha}) \leq v\,(F^{\beta})\,. \tag{26}$$

Tale funzione può essere la d_s, ma esigenze di varia natura potrebbero far pervenire una funzione v diversa dalla d_s. In questo lavoro ci limitiamo al caso in cui $v = d_s$.

Inoltre bisogna fissare dei valori v_1 e v_2 di v con $v_1 < v_2$, detti "valore scalare di soglia" e "valore di apprezzamento". Nel caso in cui $v = d_s$ riteniamo che si debba assumere $v_1 = m(S)$.

I progetti F^{α} appartenenti a F^I vengono allora classificati in base ai valori $c_s(F^{\alpha})$ e $v(F^{\alpha})$ in 9 classi .

In base alla c_s i progetti si dicono

(C1) fattibili se $c_s = 0$

(C2) quasi fattibili se $0 < c_s \leq h$

(C3) non fattibili se $c_s > h$.

In base alla v i progetti si dicono

(V1) molto validi se $v \geq v_2$

(V2) sufficientemente validi se $v_1 \leq v < v_2$
(V3) non validi se $v < v_1$

Se si assume la (23) si considerano solo le tre classi (C1) - (V1), (C1) - (V2) e (C1) - (V3) . In particolare si trascura la classe (C2) - (V1) costituita da progetti molto validi e che superano di poco la matrice di soglia, progetti che riteniamo debbano essere valutati in maniera approfondita.

BIBLIOGRAFIA

1. A. FADINI, *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati,* Montefeltro Liguori Editore, 1979.
2. A. KAUFMANN, *Theory of fuzzy subsetc,* vol. I Academie Press, New York 1975
3. A. KAUFMANN, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous,* vol II *Applications à la semantique,* Masson, Paris 1975
4. A. KAUFMANN, *Introductions* ecc. Vol III - *Applications a la classification et à la reconossance des formes,* Masson, Paris 1975
5. F. GIRARD, *Risorse architettoniche e culturali: valutazioni e strategie di conservazione,* Franco Angeli, Milano 1987
6. F. GIRARD, *La conservazione nella pianificazione fisica,* Franco Angeli, Milano 1989
7. A. ZADETH, *Fuzzy sets,* Inform. Contr., 8, 1965
8. S. MICCOLI, *La valutazione di fattibilità nei programmi complessi d'intervento urbano,* Genio Rurale n°3, 1995