Ratio Mathematica 10
(1996), 85 - 90

ALGEBRA ASTRATTA
E
INSEGNAMENTO

Luigi Cerritelli*, Fabio Mercanti*

SUNTO - Si mostra un esempio di *iperoperazione* su un cerchio, come applicazione didattica di *un'algebra* astratta.

ABSTRACT - An example of *hyperoperation* on a circle has been exhibited, as a didactic application of an *abstract algebra.*

INTRODUZIONE

0. In questa nota si propone l'uso di particolari strutture algebriche, le *iperstrutture*, per interpretare alcuni aspetti della geometria elementare con un linguaggio algebrico astratto. Senza addentrarsi nella problematica assai complessa dello studio delle iperstrutture, per le quali si rimanda a CORSINI [2], [3], BERARDI-EUGENI-INNAMORATI [1], ci si limita, in questa sede, solamente a richiamare il concetto di *iperoperazione*, che sta alla base di quello di iperstruttura. Si mostra poi un esempio di applicazione didattica, passibile di ulteriore miglioramento, del concetto di iperoperazione stessa.

I PROGRAMMI DI FRASCATI

1. Lo spirito informatore dei programmi studiati, alla fine degli anni sessanta, nei convegni promossi dalla *Commissione per l'Insegnamento*

---

* Politecnico di Milano, Via Bonardi 3.

della Matematica, i cosiddetti *programmi di Frascati*, era fortemente indirizzato verso la ricerca di una base matematica comune a tutti gli indirizzi di scuola secondaria superiore. Tale base veniva successivamente sviluppata in funzione delle specializzazioni triennali. In tal senso tra i primi libri scolastici innovatori ricordiamo *Matematica 1, Zanichelli, Bologna 1971, di A. Rossi Dell'Acqua e F. Speranza*. In esso, infatti, si individuava, nel linguaggio dell'*algebra astratta*, il fulcro attorno al quale costruire una unitarietà che descrivesse algebra e geometria euclidea con un continuo collegamento trasversale. Fu una operazione *fusionista* (D'ANIELLO[4]) nel senso più ardito della parola: una provocazione intelligente e anticipatrice di nuove metodologie didattiche.

ALGEBRA ASTRATTA E INSEGNAMENTO SECONDARIO

2. La diffusione delle idee algebriche fondamentali stentava, però, a decollare, nonostante gli sforzi di associazioni come la *Società di Scienze Matematiche e Fisiche Mathesis*, ben radicata sul territorio nazionale (RIZZI [6]). Un contributo determinante in tale direzione è stato quello di ZAPPA-PERMUTTI [8]. Infatti le nozioni di gruppo, di complesso in un gruppo, di sottogruppo e le questioni sui laterali intimamente connesse con le congruenze modulate su un sottogruppo, collegate al teorema di *Lagrange*, sono oggi oggetto di studio in molti corsi secondari. Le classi di resti di numeri interi hanno perduto molto del loro, per così dire, misterioso fascino, per entrare in un ruolo di normale conoscenza. Il livello matematico generale si è molto innalzato, nonostante alcuni ambienti scolastici tradizionalmente non innovatori, in particolare i licei scientifici, abbiano, in un certo senso, remato contro.

Il concetto di gruppo, e più in particolare di gruppo di trasformazioni, ha contribuito a mettere a fuoco l'importanza dell'idea di *invariante*; idea che in qualche misura permette di superare il classico dualismo tra assoluto e relativo (SPERANZA [7]).

Vale la pena di ricordare anche che nel libro scolastico *La matematica, strutture, I, Einaudi Scuola, Milano 1995, di L. Citrini, E. Castagnola e M. Impedovo* si trova ancora oggi lo spettro delle nuove idee sulla didattica della matematica prodotte dalle originarie proposte di Frascati.

SUL CONCETTO DI IPEROPERAZIONE

3. Allo stato attuale, per proseguire in una graduale algebrizzazione della geometria, ha un certo interesse didattico la nozione di *iperoperazione*, che è

alla base di avanzate ricerche su *ipergruppi* e *join-space* (CORSINI [2]). Senza voler approfondire, nel prosieguo, questioni che esulano dal livello elementare di questa trattazione, ricordiamo che, dato un insieme H, e detto P'(H) l'insieme delle sue parti non vuote, una iperoperazione $\bullet$ è un'operazione che associa a due *punti* di H una e una sola parte non vuota di H, ovvero uno ed un solo elemento di P'(H), nel seguente modo:

$$(a,b) \in H^2 \rightarrow a \bullet b \in P'(H). \tag{1}$$

La (1) sintetizza il fatto che l'iperoperazione è un'*applicazione* φ tra il *prodotto cartesiano* $H^2 = H \times H$ e l'insieme delle parti non vuote di H stesso,

$$\varphi : H^2 \rightarrow P'(H).$$

L'operazione può essere reiterata come indicato in (2) e (3).

$$(a \bullet b) \bullet c = \bigcup_{z \in a \bullet b} z \bullet c \tag{2}$$

$$a \bullet (b \bullet c) = \bigcup_{w \in b \bullet c} a \bullet w \tag{3}$$

UN ESEMPIO DIDATTICO: UNA IPEROPERAZIONE SU UN CERCHIO

4. Ci si domanda ora se sia possibile introdurre il concetto di iperoperazione nella geometria elementare, per potere interpretare i fatti geometrici con un linguaggio puramente algebrico. La risposta può essere affermativa se riusciamo ad entrare in uno spirito di ricerca didattica, senza coltivare pregiudizi *antifusionisti* (cfr. § 2).

Dato, per esempio, un cerchio H di centro 0 e raggio qualsiasi, sia L la circonferenza ad esso associata, che consideriamo inclusa nel cerchio stesso. L'insieme P'(H) delle parti non vuote di H contiene la stessa circonferenza, archi e corde comunque costruiti, segmenti e settori circolari, cerchi interni e figure continue e discrete immerse in H e costruite a piacere.

4.1. L'iperoperazione che prendiamo in considerazione sia definita nel modo seguente.

(a) Ad ogni coppia di punti distinti del cerchio H risulti associato il segmento $P_1 P_2$ che li unisce, con l'ulteriore convenzione che, se i punti sono coincidenti, il risultato è il punto stesso pensato come *singleton* di P'(H).
Avremo $P_1 \bullet P_2 = P_1 P_2$; $P_1 \bullet P_1 = P_1$.

(b) Ottenuto il segmento $P_1 \bullet P_2$ [1]si costruisca l'unione di tutti i segmenti aventi come estremo fisso $P_3 \in H$ e come secondo estremo un punto M_K del segmento $P_1 \bullet P_2$.

Avremo $$(P_1 \bullet P_2) \bullet P_3 = \bigcup_{M_K \in P_1 \bullet P_2} M_K \bullet P_3 . \qquad \text{(cfr. (2))}$$

(c) Ottenuto il segmento $P_2 \bullet P_3$ si costruisca l'unione di tutti i segmenti aventi come estremo fisso P_1 e come secondo estremo un punto N_K del segmento $P_2 \bullet P_3$.

Avremo $$P_1 \bullet (P_2 \bullet P_3) = \bigcup_{N_K \in P_2 \bullet P_3} P_1 \bullet N_K . \qquad \text{(cfr. (3))}$$

4.2. E' immediato verificare che:

- l'iperoperazione introdotta è commutativa;
- l'iperoperazione è associativa; ad ogni terna di punti corrisponde il loro triangolo se essi non sono allineati ed il segmento che li contiene se sono allineati;
- ad ogni coppia di punti distinti appartenenti alla circonferenza L corrisponde una corda del cerchio;
- ad ogni terna di punti appartenenti alla circonferenza corrisponde un triangolo iscritto in essa;
- allargando ulteriormente l'iperoperazione ad una quaterna di punti scelti sulla circonferenza, si osserva la costruzione di un quadrilatero inscritto nella circonferenza. Se si continua ad aumentare il numero dei punti si ottiene una successione di poligoni inscritti che "ammettono come limite" il cerchio stesso.

4.3. E' possibile inoltre, analogamente a quanto fatto in 4.1 e con le opportune ovvie precisazioni, definire algebricamente le figure immerse nel cerchio H di centro O nel seguente modo.

Segmento circolare; $$\bigcup_{X \in P_1 P_2} (P_1 \bullet P_2) \bullet X \quad ; \quad P_1 P_2 : \text{arco di } L .$$

Semicerchio; $$\bigcup_{X \in P_1 P_2} (P_1 \bullet P_2) \bullet X \quad ; \quad 0 \in P_1 \bullet P_2 ; \quad P_1 P_2 : \text{arco di } L .$$

---

[1] Per semplicità si suppone che, nel seguito, i punti comunque considerati siano distinti.

Settore circolare; $\left(\bigcup_{\substack{Y \in P_1 \bullet P_2 \\ P_1, P_2 \in L}} 0 \bullet Y \right) \cup \left(\bigcup_{X \in P_1 P_2} (P_1 \bullet P_2) \bullet X \right)$.

Cerchio come luogo di corde; $\bigcup_{P_k, P_i \in L} P_k \bullet P_i = H$.

CONCLUSIONI

5. Concludiamo questa breve nota osservando che l'iperoperazione introdotta nel cerchio H può rigenerare H stesso in più modi, ma comunque sempre con procedimenti iterativi. L'esempio fatto nel paragrafo precedente fornisce un'idea del campo di applicazione didattica del concetto di iperstruttura e, in particolare, di iperoperazione.

In tal senso quindi l'introduzione di particolari iperoperazioni potrà fornire validi *strumenti didattici* a sussidio dell'insegnamento (e quindi dell'apprendimento) della geometria piana e spaziale. Consentirà anche la fusione, nel senso richiamato al § 1, con i concetti di corrispondenza, applicazione e funzione, nonché delle loro applicazioni a *modelli matematici* della realtà, particolarmente in campo fisico, biologico ed economico.

BIBLIOGRAFIA

1. L. BERARDI, F. EUGENI e S. INNAMORATI, *Generalized designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic cryptography* - Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, World Scientific, (1990), 55-65.
2. P. CORSINI, *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi,* B.U.M.I., 2A (1983), 135-138.
3. P. CORSINI, *Prolegomena of Hypergroup theory*, Aviani Editore, Udine 1995.
4. C. D'ANIELLO, *Bruno Rizzi e il fusionismo*, su questo stesso volume, 31-34.
5. E. GELSOMINI, *Un ipergruppo associato all'insieme delle matrici quadrate di ordine n non singolari*, su questo stesso volume, 99-103.
6. B. RIZZI, *de Finetti e il Periodico di Matematiche*, Per. Mat., 2/3 (1995), 69-76.
7. F. SPERANZA, *Aspetti matematici e fisici della epistemologia della Geometria*, Atti del XVII Convegno UMI, Edizioni della Unione Matematica Italiana, Bologna, (1995), 29-35.
8. G. ZAPPA e R. PERMUTTI, *Gruppi, corpi, equazioni*, Feltrinelli, Milano 1972.