Ratio Mathematica 10
(1996), 99-103

UN IPERGRUPPO ASSOCIATO ALL' INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE DI ORDINE N NON SINGOLARI

Emma Gelsomini*

SUNTO - Si assegna un' *iperoperazione* sull'insieme delle matrici quadrate non singolari di ordine n, che conferisce all'insieme una struttura di *ipergruppo non commutativo*.

ABSTRACT - An *hyperoperation* on the set of the not singular square matrices of the n-order has been assegnated. This hyperoperation induces in the set a structure of *not commutative hypergroup*.

0. In questo lavoro si considera l'*insieme* M delle *matrici quadrate* di ordine n, non singolari, e una operazione σ definita ponendo

$$\forall x,y \in M \qquad x\,\sigma\,y = \{\, k\,x\,y \,\}_{k\in\Re}\,, \tag{1}$$

essendo xy l'ordinario prodotto righe per colonne tra matrici. Si dimostra che la struttura

$$(M, \sigma) \tag{2}$$

è un *ipergruppo*, non commutativo.

---

* Lavoro svolto nell'ambito di un gruppo di ricerca MPI 60 % del Politecnico di Milano.

1. Si ricordano brevemente, nel seguito, i concetti di *ipergruppoide* (1.1), di proprietà *associativa* (1.2) e di proprietà di *riproducibilità* (1.3), per un ipergruppoide (CORSINI [2], [3]). Le proprietà 1.1, 1.2 e 1.3 individuano un ipergruppo e dovranno, evidentemente, valere per la coppia (M,σ) (cfr.(2)).

1.1 Un ipergruppoide è una coppia $(G,\circ)$, dove G è un insieme non vuoto e

$$\circ : G x G \to P'(G) \tag{3}$$

è una *applicazione* di $G \times G$ nell'insieme $P'(G)$ delle parti non vuote di G.

1.2 Un ipergruppoide che goda della proprietà associativa

$$\forall x, y, z \in G \qquad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \tag{4}$$

dove

$$(x \circ y) \circ z = \bigcup_{a \in x \circ y} a \circ z$$

e

$$x \circ (y \circ z) = \bigcup_{b \in y o z} x \circ b,$$

viene detto *semipergruppo*.

1.3 Un semipergruppo soddisfacente la seguente proprietà

$$\forall a, b \in G \qquad \exists x \in G: b \in a \circ x, \exists y \in G: b \in y \circ a, \tag{5}$$

detta *proprietà di riproducibilità*, è un *ipergruppo*.

2. Si osservi dapprima che per (M,σ) (cfr.(2)) vale la proprietà 1.1, ovvero che (cfr. (3))

$$\sigma: M \times M \to P'(M),$$

è, manifestamente, un'applicazione.

3. Si verifica ora che per (M,σ) vale anche la proprietà 1.2., cioè si dimostra che l'ipergruppoide appena definito nel § 2 gode della proprietà associativa (cfr. 1.2).

3.1. Si considerino infatti tre matrici m, n, p $\in$ M. La (4) del § 1.2 che regola la proprietà associativa, diventa in questo caso

$$\forall\ m,n,p \in M, \quad (m\ \sigma\ n)\ \sigma\ p = m\ \sigma\ (n\ \sigma\ p). \tag{6}$$

Con evidente significato dei simboli e delle formule (cfr. (1)), si ottiene, successivamente,

$$(m\ \sigma\ n)\ \sigma\ p = \{kmn\}_{k\in\Re}\ \sigma\ p =$$

$$= \{kh(mn)p\}_{k,h\in\Re} = \{t(mn)p\}_{t\in\Re}, \tag{7}$$

con $t = kh$.

Analogamente si ha:

$$m\ \sigma\ (n\ \sigma\ p) = m\ \sigma\ \{h'np\}_{h'\in\Re} =$$

$$= \{h'k'm(np)\}_{h',\ k'\in\Re} = \{t'm(np)\}_{t'\in\Re}, \tag{8}$$

con $t' = h'k'$.

Tenendo conto della proprietà associativa del prodotto tra matrici, il confronto tra la (7) e la (8) consente l'immediata verifica della (6).

4. Si verifica infine che per (M,σ) vale la proprietà 1.3, ovvero si dimostra che il *semipergruppo* appena definito (cfr. 1.2, (7) e (8)) gode della proprietà di riproducibilità (5)

$$\forall\ m,n \in M, \quad \exists\ x \in M: n \in m\ \sigma\ x = \{kmx\}_{k\in\Re},$$

$$\exists\ y \in M: n \in y\ \sigma\ m = \{kym\}_{k\in\Re}, \tag{9}$$

essendo m e n matrici non singolari.

4.1. In entrambi i casi si ponga

$$x = m^{-1}n,$$
$$y = n\, m^{-1},$$

essendo l'esistenza di m^{-1} garantita dalla non singolarità di $m \in M$.

4.2. Con evidente significato di linguaggio e simboli, si calcola immediatamente

$$m \,\sigma\, x = \{k\, m\, x\}_{k \in \mathfrak{R}} = \{k\, m\, m^{-1}\, n\}_{k \in \mathfrak{R}} = \{k\, n\}_{k \in \mathfrak{R}}.$$

Nel caso in cui $k=1$, è chiaramente verificato che

$$n \in m \,\sigma\, x \,.$$

Analogamente si può concludere anche che

$$n \in y \,\sigma\, m \,.$$

La (9) è quindi verificata.

4.3. Pertanto si conclude che il semipergruppo considerato gode anche della proprietà di riproducibilità (cfr. 1.3).

5. Da quanto detto nei paragrafi 2, 3 e 4, segue che la coppia (M,σ) è un ipergruppo.

BIBLIOGRAFIA

1. L. BERARDI, F. EUGENI e S. INNAMORATI, *Generalized designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic cryptography,* Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, World Scientific, (1990), 55-65.

2. P. CORSINI, *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi*, B.U.M.I., 2-A (1983),133-138.

3. P. CORSINI, *Prolegomena of hypergroup theory*, Aviani Editore, Udine 1992.

4. M.GIONFRIDDO, *Hypergroups associated with multihomomorphisms between generalized graphs*, Atti Convegno su "Sistemi binari e loro applicazioni ", Taormina (1978), 161-174.