Ratio Mathematica 9
(1995), 101 - 111

UNA NOTA SU GLI IPERGRUPPOIDI CICLICI

Domenico Freni *

SUNTO - In questo articolo si intraprende lo studio degli ipergruppoidi ciclici. In particolare, nel caso finito, utilizzando l'insieme $C_x = \{ n \in N^* \mid x^{(n+1)} \subseteq \cup_{k=1}^{n} x^{(k)}\}$ e il massimo del complementare in N di C_x , si caratterizza la struttura del sotto-ipergruppoide ciclico < x > generato da x.

ABSTRAT - In this paper one begins to study cyclic hypergroupoids. In particular, in the finite case, by using the set $C_x = \{ n \in N^* \mid x^{(n+1)} \subseteq \cup_{k=1}^{n} x^{(k)}\}$ and the maximum element of the set N - C_x , one characterizes the structure of the cyclic subhypergroupoid < x > generated by x.

In tutto questo lavoro con (H, •) si indicherà un ipergruppoide, e spesso, con abuso di notazione, si utilizzerà il simbolo H per indicare non solo il sostegno del corrispondente ipergruppoide, ma l'ipergruppoide stesso.

Definizione: In ogni ipergruppoide (H, •) e per ogni elemento x di H si pone:

$$x^{(1)} = \{x\};$$

$$x^{(2)} = x \bullet x = x^{(1)} \bullet x^{(1)};$$

$$x^{(3)} = (x \bullet x) \bullet x \cup x \bullet (x \bullet x) = x^{(2)} \bullet x^{(1)} \cup x^{(1)} \bullet x^{(2)};$$

e ricorsivamente, per ogni $n \geq 1$, sia

$$x^{(n+1)} = \cup_{k=1}^{n} x^{(k)} \bullet x^{(n-k+1)}.$$

In seguito, per ogni elemento x di un ipergruppoide (H, •), l'insieme $\cup_{k \geq 1} x^{(k)}$ si indicherà con < x >.

* Dipartimento di Matematica e informatica, via delle scienze 206, 33100 Udine

Chiaramente, per ogni coppia (z, w) di elementi di $< x >$, esiste una coppia (r, s) di elementi di N^* tale che $z \in x^{(r)}$ e $w \in x^{(s)}$, quindi $z \bullet w \subseteq x^{(r)} \bullet x^{(s)} \subseteq x^{(r+s)}$, per cui $< x > \bullet < x > \subseteq < x >$ ed $< x >$ e un sotto-ipergruppoide di H.

Definizione: Il sotto-ipergruppoide $< x >$ si chiama *sotto-ipergruppoide ciclico generato da x.*

Se, in particolare, esiste $x \in H$ tale che $H = < x >$, allora l'ipergruppoide H si dice *ciclico, generato da x.*

Si osservi che $< x >$ e contenuto in tutti i sotto-ipergruppoidi contenenti l'elemento x, e quindi è il piu piccolo sotto-ipergruppoide contenente x.

Ovviamente, per ogni $y \in < x >$ si ha $< y > \subseteq < x >$.

Ecco due esempi che permettono di determinare classi di ipergruppoidi ciclici:

Esempio 1: Sia $F_1 = \{A_i\}_{i \in N^*}$ una famiglia numerabile di insiemi non vuoti e $H_1 = \cup_{i \in N^*} A_i$. Inoltre, per ogni $x \in H_1$, sia $n_x = \min\{n \in N^* \mid x \in A_n\}$.

Con queste notazioni, si definisce sull'insieme H_1 il seguente iperprodotto:

$$x \bullet_1 y = A_{n_x + n_y}$$

Esempio 2: Siano $I_n = \{ 1, 2, \dots, n \}$, $F_2 = \{ A_i \}_{i \in I_n}$ una famiglia finita di insiemi non vuoti, $H_2 = \cup_{i=1}^{n} A_i$ e $n_x = \min\{k \in I_n \mid x \in A_k \}$, per ogni $x \in H_2$. Chiaramente, per ogni coppia (x, y) di elementi di H_2, si ha $n_x + n_y \leq 2n$, e se $n_x + n_y > n$ allora $n_x + n_y - n \in I_n$, sicché su H_2 si può definire il seguente iperprodotto:

$$x \bullet_2 y = \begin{cases} A_{n_x+n_y} & \Leftrightarrow n_x+n_y \leq n \\ A_{n_x+n_y-n} & \Leftrightarrow n_x+n_y > n \end{cases}$$

Si supponga, adesso, che gli insieme A_i di F_1 siano tali che

$$A_i^* = A_i - (\cup_{j \in N^* - \{i\}} A_j), \text{ per ogni } i \in N^*.$$

Se $\{x_i\}_{i \in N^*}$ è un sottoinsieme di H_1 tale che $x_1 \in A_1$ e $x_i \in A_i^*$, per ogni $i \geq 2$, allora si ha $n_{x_i} = i$, per ogni $i \in N^*$, e quindi:

$$A_2 = x_1^{(1)} \bullet_1 x_1^{(1)} = x^{(2)};$$

$$A_3 = x_1 \bullet_1 x_2 \subseteq x_1 \bullet_1 A_2 = x_1 \bullet_1 x_1^{(2)} \subseteq x_1^{(3)};$$

e ricorsivamente si prova che

$$A_{n+1} \subseteq x_1^{(n+1)}$$

Pertanto, si ha l'inclusione $\cup_{k\geq 2} A_i \subseteq < x_1 >$.

Inoltre, se esiste $x_1^* \in < x_1 > \cap (A_1^* - \{x_1\})$, allora esiste un intero positivo $n\geq 2$ ed esiste $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $x_1^* \in x_1^{(r)} \bullet_1 x_1^{(n-r)}$, e presi $a \in x_1^{(r)}$ e $b \in x_1^{(n-r)}$ tali che $x_1^* \in a \bullet_1 b$, si ha $x_1^* \in A_{n_a+n_b} \subseteq \cup_{k\geq 2} A_i$, ma ciò è impossibile perché $x_1^* \in A_1^*$.

Quindi $< x_1 > \cap (A_1^* - \{x_1\}) = \varnothing$ e $< x_1 > = \{x_1\} \cup (\cup_{k\geq 2} A_i)$.

Dunque si ha:

Se $F_1 = \{A_i\}_{i\in N^*}$ è una famiglia numerabile di insiemi non vuoti tali che $A_i^* \neq \varnothing$, per ogni $i \in N^*$, allora $<x_1> = \{x_1\} \cup (\cup_{k\geq 2} A_i)$, per ogni $x_1 \in A_1$. E se, in particolare, $A_1 - \{x_1\} \subset \cup_{k\geq 2} A_i$ oppure l'insieme A_1 è il singleton $\{x_1\}$, allora H_1 è ciclico generato da x_1.

Ed analogamente, si prova la seguente proprietà:

Se gli insiemi di F_2 sono tali che $A_i^* \neq \varnothing$, per ogni $i \in I_n$, allora si ha sempre $H_2 = <x_1>$, cioè $(H_2, \bullet_2)$ è ciclico generato da ogni elemento di A_1^*.

Osservazione: Siano S una relazione binaria e non vuota su un insieme A e $C = \{n \in N^* \mid S^{n+1} \subseteq \cup_{k=1}^{n} S^k\}$.

Se $C = \varnothing$, le relazioni S^i, per ogni $i \in N^*$, sono tutte distinte e non vuote, dunque la famiglia $F_1 = \{ S_i \}_{i\in N^*}$ è costituita da sottoinsiemi non vuoti e distinti di $A\times A$.

Analogamente, se $C \neq \varnothing$, posto $C_s = \min C$, la famiglia $F_2 = \{ S^i \}_{i=1}^{C_s}$ è anch'essa costituita da sotto-insiemi non vuoti e distinti di $A\times A$.

In $H_1 = \cup_{i\in N^*} S^i$ o su $H_2 = \cup_{i=1}^{C_s} S^i$ si possono considerare gli iperprodotti definiti, rispettivamente, negli esempi (1) e (2), ottenendo così degli ipergruppoidi, detti *C_T-ipergruppoidi*, perchè H_1 o H_2 costituiscono la chiusura transitiva $C_T(S)$ di S.

Chiaramente, se S è transitiva si ha $C_s = 1$ e $(H_2, \bullet_2)$ è l'ipergruppo totale su S.

Adesso si dimostrano alcuni risultati sui sotto-ipergruppoidi ciclici, ma prima si osservi che in seguito, in ogni ipergruppoide $(H, \bullet)$ e per ogni $x \in H$, con C_x e N_x si indicano i due seguenti insiemi:

$$C_x = \{s \in N^* \mid x^{(s+1)} \subseteq \cup_{k=1}^{s} x^{(k)}\},\ N_x = N - C_x.$$

Definizione: Un elemento x di un ipergruppoide H si dice *debolmente idempotente* se $x \in x \bullet x$, e si dice *idempotente* se si ha l'uguaglianza $x \bullet x = \{x\}$.

Proposizione 1: *Sia H un ipergruppoide ed x un suo qualunque elemento, allora si ha:*

1) Se $C_x = \varnothing$, allora $|\cup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}| \geq n+1$, per ogni $n \geq 1$;

2) Se H è un ipergruppoide finito, allora $C_x \neq \varnothing$;

3) $C_x = N^*$ se, e solo se, x è idempotente;

4) $N_x \neq \{0\}$ se, e solo se, x non è idempotente.

Dimostrazione

(1) Siccome $x^{(2)} \not\subset x^{(1)}$, ovviamente, si ha $|x^{(1)} \cup x^{(2)}| \geq 2$. Ed induttivamente, se $|\cup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}| \geq n+1$, poiché $x^{(n+2)} \not\subset \cup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}$, si ottiene:

$$|\cup_{k=1}^{n+2} x^{(k)}| \geq |\cup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}| + 1 \geq n+2.$$

(2) Se esiste un elemento $x \in H$ tale che $x^{(s+1)} \not\subset \cup_{k=1}^{s} x^{(k)}$, per ogni $s \geq 1$, allora, per (1), si ha $|\cup_{k=1}^{|H|+1} x^{(k)}| \geq |H| + 1 > |H|$, e ciò è impossibile.

(3) Se $C_x = N^*$, in particolare, si ha $x \bullet x = x^{(2)} \subseteq x^{(1)} = \{x\}$ e quindi x è idempotente.

Viceversa, se x è idempotente, si ha $x^{(2)} = x \bullet x = \{x\} = x^{(1)}$ e ricorsivamente si prova che $x^{(s)} = x^{(1)}$, per ogni $s \geq 1$. Dunque $C_x = N^*$.

(4) segue subito da (3).

Osservazione: E' chiaro che $c_x = \min C_x = 1$ se, e solo se, x è idempotente se, e solo se, $\langle x \rangle = \{x\}$.

Ovviamente, se x non è idempotente si ha $c_x \geq 2$ e $\{0, 1, 2, \ldots, c_x - 1\} \subseteq N_x$.

Teorema 1: *Sia H un ipergruppoide finito ed x un suo elemento, allora si ha:*

1) L'insieme N_x ha un massimo m_x.

2) Per ogni $i \geq 1$, si ha $m_x + i \in C_x$.

3) Per ogni $i \geq 1$, si ha $\cup_{k=1}^{m_x+i} x(k) = \cup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$ e $< x > = \cup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$.

Dimostrazione

(1) Se x è idempotente si ha $\max N_x = 0$. Allora, sia x non idempotente.

Per la proposizione 1(4), la cardinalità $|N_x|$ di N_x è maggiore di uno. Ora, se N_x e privo di massimo, ordinando i suoi elementi con l'ordine naturale di N, l'insieme N_x costituisce una catena $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$

Chiaramente, per ogni $j \geq 1$, si ha:

$$\cup_{k=1}^{n_j} x(k) \subseteq \cup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k)$$

e se si ha l'uguaglianza $\cup_{k=1}^{n_j} x(k) = \cup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k)$, allora, essendo $n_j + 1 \leq n_{j+1}$, si ha:

$$x^{(n_j+1)} \subseteq \cup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k) = \cup_{k=1}^{n_j} x(k)$$

e ciò è impossibile perché $n_j \notin C_x$.

Pertanto $\cup_{k=1}^{n_j} x(k)$ è strettamente contenuto in $\cup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k)$.

Allora in H si trova una catena di sottoinsiemi l'uno strettamente contenuto nell'altro

$$\cup_{k=1}^{n_1} x(k) \subset \cup_{k=1}^{n_2} x(k) \subset \ldots \subset \cup_{k=1}^{n_j} x(k) \subset \ldots$$

che non si blocca, e ciò è impossibile perché H è finito.

(2) Se esiste un intero $i \geq 1$ tale che $m_x + i \notin C_x$, allora $m_x + i \in N_x$ e per la massimalità m_x si ha $m_x + i \leq m_x$, e quindi $i = 0$, contro l'ipotesi.

(3) Se i=1, siccome $m_x + 1 \in C_x$, si ha $x^{(m_x+2)} \subseteq \cup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$ e dunque

$$\cup_{k=1}^{m_x+2} x(k) = \cup_{k=1}^{m_x+1} x(k).$$

Pertanto, posto $\cup_{k=1}^{m_x+i} x(k) = \cup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$, siccome $m_x + i \in C_x$, si ha

$$x^{(m_x+i+1)} \subseteq \cup_{k=1}^{m_x+i} x^{(k)}$$

e quindi

$$\cup_{k=1}^{m_x+i+1} x^{(k)} = \cup_{k=1}^{m_x+i} x^{(k)} = \cup_{k=1}^{m_x+1} x^{(k)}$$

per cui

$$< x > = \cup_{k=1}^{m_x+1} x^{(k)}.$$

Corollario 1: *Sia H un ipergruppoide finito ed x un suo elemento debolmente idempotente, allora si ha* $< x > = x^{(m_x+r)}$, *per ogni* $r \geq 1$.

Dimostrazione

Ovviamente si ha $x^{(1)} \subseteq x^{(2)}$ e $x^{(2)} = x^{(1)} \bullet x^{(1)} \subseteq x^{(1)} \bullet x^{(2)} \subseteq x^{(3)}$.

Inoltre, se, per ogni intero positivo m tale che $1 \leq m < n$, si suppone che $x^{(m)} \subseteq x^{(m+1)}$, allora si ha

$$x^{(n)} = \cup_{k=1}^{n-1} x^{(k)} \bullet x^{(n-k)} \subseteq \cup_{k=1}^{n-1} x^{(k)} \bullet x^{(n-k+1)} \subseteq \cup_{k=1}^{n} x^{(k)} \bullet x^{(n-k)} = x^{(n+1)},$$

per cui $x^{(n)} \subseteq x^{(n+1)}$, per ogni $n \in N^*$. E dunque, per il teorema 1.(3), si ottiene:

$$x^{(m_x+1)} \subseteq < x > = \cup_{k=1}^{m_x+1} x^{(k)} \subseteq x^{(m_x+1)}$$

e quindi

$$< x > = x^{(m_x+1)}$$

Infine, siccome $m_x + 2 \in C_x$, si ha

$$x^{(m_x+2)} \subseteq \cup_{k=1}^{m_x+1} x^{(k)} = x^{(m_x+1)} \subseteq x^{(m_x+2)},$$

cioè $x^{(m_x+1)} = x^{(m_x+2)}$, e ricorsivamente si prova che $x^{(m_x+1)} = x^{(m_x+r)}$, per ogni $r \geq 1$.

Teorema 2: *Se A è un insieme finito e non vuoto ed S è una relazione binaria e non vuota su A, allora.* $C_S = \{ n \in N^* \mid S^{n+1} \subseteq \cup_{k=1}^{n} S^k \} \leq |A|$ *Inoltre, se* $S^h \cap S^k = \varnothing$, *per ogni coppia (h, k) di elementi distinti di* I_{C_S}, *allora il* C_T*-ipergruppoide* $(H, \bullet_2)$ *è un ipergruppoide ciclico e completo, generato da ogni elemento X di S, la ciclicità di X è* $Cicl_X(X) = C_S+1$, *e il cuore* ω_H *di* $(H, \bullet_2)$ *è* S^{C_S}.

Dimostrazione

Sia $|A| = n$ e $T = \cup_{k=1}^{n} S^k$.

Per ogni $(x, y) \in S^{n+1}$, esiste $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ tale che

$$x \, S \, a_1 \, S \, a_2 \, S \ldots S \, a_n \, S \, y$$

Se esiste $r \in I_n$ tale che $x = a_r$, allora si ha

$$x = a_r \, S \, a_{r+1} \, S \ldots S \, a_n \, S \, y$$

dunque $(x, y) \in S^{n-r+1}$ e di conseguenza $(x, y) \in T$, perché $1 \leq n-r+1 \leq n$. E se, per ogni $r \in I_n$, si ha $x \neq a_r$, siccome $\{x, a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq A$ e $|A| = n$, esiste una coppia (r, s) di elementi di I_n tale che $1 \leq r < s \leq n$ e $a_r = a_s$. Pertanto si ha

$$x \, S \, a_1 \, S \, a_2 \, S \ldots S \, a_r \, S \, a_{s+1} \, S \ldots S \, a_n \, S \, y,$$

e quindi $(x, y) \in S^{n-(s-r)+1} \subseteq T$.

Dunque $S^{n+1} \subseteq T = \cup_{k=1}^{n} S^k$, e di conseguenza $C_S \leq n = |A|$.

Adesso, sia $H = \cup_{k=1}^{C_S} S^k$ e $(H, \bullet_2)$ l'ipergruppoide definito nell'esempio 2. Se $S^h \cap S^k = \varnothing$ per ogni coppia (h, k) di elementi distinti di I_{C_S}, allora per ogni $X \in H$, si ha :

$$n_X = \min\{k \in I_{C_S} \mid X \in S^k\} = h \Leftrightarrow X \in S^h$$

e l'iperprodotto così definito:

$$X \bullet_2 Y = \begin{cases} S^{h+k} \Leftrightarrow h+k \leq C_S \\ S^{h+k-C_S} \Leftrightarrow h+k > C_S \end{cases}$$

Sicchè, se S non è transitiva, considerando il gruppo ciclico Z_{C_S-1}, si può porre $S(O) = S^{C_S}$, $S(1) = S, \ldots, S(C_S-1) = S^{C_S-1}$, e si prova che

$$X \bullet_2 Y = S(h+k) \Leftrightarrow X \in S(h), Y \in S(k)$$

e $(H, \bullet_2)$ è un ipergruppo completo (vedi [2])

Inoltre, $(H, \bullet_2)$ è ciclico, g**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**enerato da ogni elemento $X \in S$, la ciclicità di X è C_S+1 e $\omega_H = S^{C_S}$ (vedi [3]).

Se S è transitiva, (H, $\bullet_2$) è l'ipergruppo totale su H e la tesi è immediata.

Proposizione 2 : *Se H è un semi-ipergruppo finito, per ogni elemento x di H si ha* $c_x = m_x + 1$

Dimostrazione

Il risultato è evidente se x è idempotente. Allora, sia x non idempotente, ovviamente, per ogni $n \geq 1$, si ha $x^{(n)} = x^n$ e, per la proposizione 1(2), $C_x \neq \emptyset$ (per semplicità il singleton $\{x\}$ si identifica con l'elemento x, sicché $x^{(1)} = x$). Inoltre

$$x^{c_x + 2} = x^{c_x + 1} \bullet x \subseteq (\cup_{k=1}^{c_x} x^k) \bullet x = \cup_{k=2}^{c_x+1} x^k \subseteq \cup_{k=1}^{c_x+1} x^k$$

e induttivamente si prova che

$$x^{c_x+s} \subseteq \cup_{k=1}^{c_x+s-1} x^k, \text{ per ogni } s \geq 1.$$

Dunque $n \in C_x$ se e solo se $n + 1 \in C_x$, e siccome $\{ 0, 1, 2, \ldots, c_x - 1 \} \subseteq N_x$, si ha $c_x - 1 = \max N_x$ e quindi $c_x = m_x + 1$.

Osservazione: Se H non è un semi-ipergruppo, in generale, non si ha l'uguaglianza $c_x = m_x + 1$. Ecco un esempio:

Sia H un insieme finito di cardinalità ≥ 3 e siano x, a, b tre elementi distinti di H.

Si definisce su H il seguente iperprodotto:

$$(H, \bullet) = \begin{cases} x \bullet x = x \bullet a = a \bullet x = \{a\}; \\ a \bullet a = \{a, b\}; \\ z \bullet w = H, \ \forall (z, w) \in H^2 - \{x, a\}^2. \end{cases}$$

Facilmente si prova che $\{a\} = x^{(2)} \not\subset x^{(1)} = \{x\}$, $x^{(3)} = x^{(2)} = \{a\}$ e quindi $c_x = \min C_x = 2$. Inoltre $x^{(4)} = \{a, b\} \not\subset x^{(3)} = \{a\}$, per cui $3 \in N_x$ e $m_x = \max N_x \geq 3$. Pertanto $c_x \neq m_x + 1$.

Proposizione 3: *Sia H un ipergruppoide finito tale che* $x \bullet \langle x \rangle = \langle x \rangle \bullet x = \langle x \rangle$, *per ogni* $x \in H$. *Allora esiste in H almeno un sottoquasi-ipergruppo ciclico.*

Dimostrazione

Sia $F = \{\langle x \rangle\}_{x \in H}$ la famiglia dei sotto-ipergruppoidi ciclici di H. Per la finitezza di H, esiste in F un sotto-ipergruppoide ciclico $\langle e \rangle$ di cardinalità minima.

Per ogni $y \in \langle e \rangle$, si ha $\langle y \rangle \subseteq \langle e \rangle$ e per la minimalità della cardinalità di $\langle e \rangle$, si ricava $\langle y \rangle = \langle e \rangle$.

Ma, per ipotesi, si ha:

$$y \bullet \langle y \rangle = \langle y \rangle \bullet y = \langle y \rangle,$$

e quindi

$$y \bullet \langle e \rangle = y \bullet \langle y \rangle = \langle y \rangle = \langle e \rangle = \langle y \rangle = \langle y \rangle \bullet y = \langle e \rangle \bullet y$$

Pertanto, per ogni $y \in \langle e \rangle$, si ha

$$y \bullet \langle e \rangle = \langle e \rangle = \langle e \rangle \bullet y.$$

Corollario 2: *Sia H un semi-ipergruppo finito tale che ogni elemento x di H sia debolmente idempotente, allora in H esiste almeno un sotto-ipergruppo ciclico.*

Dimostrazione

Per il corollario 1, si ha $\langle x \rangle = x^{m_x+1}$ e quindi

$$\langle x \rangle \bullet x = x^{m_x+1} \bullet x = x^{m_x+2} = x^{m_x+1} = \langle x \rangle.$$

Allo stesso modo si prova che $x \bullet \langle x \rangle = \langle x \rangle$, e la proposizione 3 completa la dimostrazione.

Osservazione: Nell'articolo [9] si è definita la relazione Δ di associatività negli ipergruppoidi, e si è dimostrato (vedi teoremi 2.1 e 2.2) che nei quasi-ipergruppi la relazione è transitiva e il quoziente $H_{/\Delta}$ è un gruppo rispetto all'operazione:

$$\Delta(x) \otimes \Delta(y) = \Delta(z), \quad \forall\, z \in x \bullet y.$$

Inoltre, la proiezione canonica $q : H \to H_{/\Delta}$ è un omomorfismo buono, e se ω è l'identità di $H_{/\Delta}$, allora $W = q^{-1}(\omega)$ è un sottoquasi-ipergruppo di H.

Teorema 3: *Sia H un quasi-ipergruppo, $x \in H$ e $P_x = \{n \in N^* \mid x^{(n)} \subseteq W\}$. Se $P_x \neq \emptyset$, posto $p_x = \min P_x$, si ha:*

1) $q(\langle x \rangle) \cong Z_{p_x}$;

2) $p_x = \min P_x \leq c_x = \min C_x$;

3) Se H è finito, allora $p_x = \min P_x \leq \max N_x + 1 = m_x + 1$.

Dimostrazione

(1) Per ogni $k \in N^*$, e per ogni $a \in (\ldots((x \bullet x) \bullet x) \bullet x \ldots) \bullet x$, con x ripetuto k-volte, si ha $q(a) = q(x)^k$. Inoltre, per ogni $b \in x^{(k)}$, si ha $b \, \Delta \, a$, dunque $q(a) = q(b) = q(x)^k$ e quindi $q(x^{(k)}) = q(x)^k$, e poiché $< x > = \cup_{k \geq 1} x^{(k)}$, si ottiene:

$$q(< x >) = q(\cup_{k \geq 1} x^{(k)}) = \cup_{k \geq 1} q(x^{(k)}) = \{q(x)^k\}_{k \geq 1}.$$

Del resto si ha $x^{(p_x)} \subseteq W$, quindi $(q(x))^{p_x} = \omega$ e l'ordine $r = |< q(x) >|$ di $q(x)$ divide p_x.

Ora, se $p_x > r$ si ha $h = p_x - r \geq 1$, e poiché $q(x)^{p_x} = \omega = q(x)^r$, si ottiene $q(x)^h = \omega$. Pertanto, per ogni $a' \in (\ldots((x \bullet x) \bullet x) \bullet x \ldots) \bullet x$, con x ripetuto h volte, e per ogni $b' \in x^{(h)}$ si ha $b' \, \Delta \, a'$, di conseguenza $q(a') = q(b') = q(x)^h = \omega$, per cui $x^{(h)} \subseteq W$ e ciò è impossibile per la minimalità di p_x. Dunque $r = p_x$ e quindi si ha:

$$q(< x >) = \{ q(x)^k \}_{k=1}^{p_x} \cong Z_{p_x}.$$

(2) Se x è idempotente si ha $q(x) \otimes q(y) = q(x)$, dunque $q(x) = \omega$, $x \in W$ e $p_x = 1$. Inoltre, per la proposizione 1(3), $c_x = \min C_x = 1$ e quindi

$$p_x = c_x = 1$$

Se x non è idempotente, si ha $c_x \geq 2$, e siccome $x^{c_x + 1} \subseteq \cup_{k=1}^{c_x} x^{(k)}$, si ha

$$q(x)^{c_x + 1} \in \{ q(x)^k \}_{k=1}^{c_x},$$

e quindi esiste un intero positivo s tale che $1 \leq s \leq c_x$ e $q(x)^{c_x + 1} = q(x)^s$. Pertanto si ha $q(x)^{c_x - s + 1} = \omega$, dunque $x^{(c_x - s + 1)} \subseteq W$, cioè $c_x - s + 1 \in P_x$, e, chiaramente, si ottiene

$$p_x = \min P_x \leq c_x - s + 1 \leq c_x = \min C_x.$$

(3) Se x è idempotente $N_x = \{0\}$ e $p_x = 1$. Se x non è idempotente, per il teorema 1(2), si ha $m_x + 1 \in C_x$, e per (2), $p_x = \min P_x \leq c_x = \min C_x \leq \max N_x + 1 = m_x + 1$.

BIBLIOGRAFIA

1. P. CORSINI, *Prolegomena of hypergroup theory*, 2nd ed Aviani Editore, 1992
2. P. CORSINI, *Sur les semi-hypergroupes completes et les groupoides*, Atti Soc Pelor.Sc. Mat. Fis. Nat., XXVI, 1980.
3. DE SALVO - D. FRENI, *Sugli ipergruppi ciclici e completi*, Le Matematiche, Catania, Vol. XXXV, Fasc. I-II, 1980.
4. DE SALVO - D. FRENI, *Semi ipergruppi e ipergruppi ciclici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1981.

5. D. FRENI, *Ipergruppi ciclici e torsione negli ipergruppi*, Le Matematiche, Catania, Vol. XXXV, Fasc. I-II, 1980.
6. D. FRENI, *Hypergroupes cambistes - hypergroupes de type U, Applications à la théorie de la dimension et à l'homologie non abélienne*, Thése de Doctorat, Univ. de Clermont-Ferrand II, 1985.
7. D. FRENI, *Sur les hypergroupes cambistes*, Rendiconti Istituto Lombardo, A 119, 1985.
8. D. FRENI, *Sur la théorie de la dimension dans les hypergroupes*, Acta Univ. Carolinae, Vol. 27, No. 2, Praga, 1986.
9. D. FRENI, *On a strongly regular relation in hypergroupoids*, P.U.M.A. Ser. A, Vol. 3, No. 3-4, Budapes, 1992.
10. D. FRENI, *Hypergroupoids and fundamental relations*, Atti Convegno su Algebraic Hyperstructures and Applications, Iasi (Romania), Hadronic Press, Palm Harbor, FL 34682-1577, U.S.A., 1994.
11. T. VOUGIOUKLIS, *Cyclicity in a special class of hypergroups*, Acta Univ. Carolinae, Math. Phys., Vol 22, No 1, Praga, 1981.