

Numero 8 - 1994

RATIO MATHEMATICA

**Rivista di
applicazioni della matematica**

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Comitato Scientifico

Albrecht Beutelspacher, Giessen

Piergiulio Corsini, Udine

Bal K. Dass, Delhi

Franco Eugeni, Roma

Mario Gionfriddo, Catania

Antonio Maturo, Pescara

Bruno Rizzi, Roma

Aniello Russo Spina, L'Aquila

Romano Scozzafava, Roma

Numero 8 - 1994

RATIO MATHEMATICA

Rivista di
applicazioni della matematica

INDICE

S. DORIA, <i>Il processo di memorizzazione descritto mediante il modello neuronale di Hopfield</i>	pag.	3
D. P. ERRIGO, <i>Elementi di teoria ingenua delle matrici cubiche</i>	pag.	9
C. TOSONE, <i>Considerazioni sul teorema di Heine - Pincherle - Borel</i>	pag.	15
L. TIBILETTI, <i>Connectedness, Arcwise - connectedness and Convexity for Level - sets of Multidimensional Distribution Functions</i>	pag.	21
F. MERCANTI, <i>Una rassegna dei risultati e delle prospettive dei Sistemi Digitali Multicanale</i>	pag.	29
G. IPPOLITI e D. MARCONI, <i>Sistemi automatici di riconoscimento per le geometrie dei codici a barre</i>	pag.	59
F. DI GENNARO, D. MAIORANI e F. EUGENI, <i>Un antico modello matematico per divinazioni contenuto in una enciclopedia di fine Settecento</i>	pag.	69
S. D'ANDREA, <i>Su alcune problematiche per l'insegnamento della matematica in presenza di disabilità: strategie per un curriculum minimo</i>	pag.	83
A. MATURO e G. DI BIASE, <i>Considerazioni probabilistiche su alcune strategie nei giochi d'azzardo</i>	pag.	91

IL PROCESSO DI MEMORIZZAZIONE DESCRITTO MEDIANTE IL MODELLO NEURONALE DI HOPFIELD

Serena Doria*

Introduzione

In questi ultimi anni il cervello e la sua attivita' sono al centro degli studi di scienziati e ricercatori di diverse discipline. Anche i matematici sono intenti nello studio di modelli che simulino l'attivita' cerebrale e aiutino a capire, almeno in parte i meccanismi che la regolano.

Sicuramente tra le capacita' piu' interessanti del cervello c'e' quella di apprendere, di imparare cioe' dagli errori e dall'esperienza. Non secondaria e' poi la capacita' di memorizzare un'immagine, un odore o un suono e riconoscerlo sotto particolari stimoli. Nessun computer, finora esistente, riesce a memorizzare un numero di informazioni prossimo a quello che e' capace di contenere il cervello e soprattutto a gestire tutti i dati a sua disposizione in tempi brevissimi.

In questo lavoro viene presentato il modello di Hopfield, come esempio di schematizzazione dell'attivita' neuronale, con particolare riferimento al processo di memorizzazione.

L'importanza che i modelli neuronali, ottenuti come generalizzazioni di quello di Hopfield, hanno nella ricerca ed in particolare nella ricerca informatica e' dovuta al fatto che essi rappresentano un esempio di memoria associativa. Un tipo di memoria in cui, a partire da un'informazione parziale, mediante una dinamica propria della rete neuronale, si arriva all'informazione totale.

*Facolta' di scienze M.F.N. Universita' "G.D'Annunzio "
Via dei Vestini - Chieti

Il vantaggio di una memoria associativa rispetto ad una memoria ad indirizzi sta nel fatto che una volta data in input l'informazione parziale si arriva all'informazione totale mediante la dinamica della rete. Non e' necessario un continuo confronto tra memoria centrale e disco su cui sono contenute le informazioni con notevole risparmio di tempo.

Alcuni aspetti biologici

Prima di procedere nella descrizione del modello matematico e' necessario schematizzare brevemente il funzionamento delle cellule nervose.

L'attivita' di un neurone e' determinata dalla membrana neuronale, che per la sua diversa permeabilita' ad alcuni ioni determina una diversa concentrazione di cariche elettriche tra l'interno e l'esterno, producendo una differenza di potenziale elettrico nel neurone.

Quando la differenza di potenziale supera un certo valore soglia , il neurone emette un impulso elettrico, cioe' risulta attivo. Altrimenti rimane quiescente.

L'impulso elettrico, emesso dal neurone viene trasmesso alle altre cellule nervose attraverso un prolungamento che prende il nome di assone; inoltre ogni neurone ha altri prolungamenti, i dendriti, che hanno la funzione di ricevere gli eventuali impulsi provenienti dalle altre cellule nervose.

Assoni e dendriti di differenti neuroni sono congiunti tra loro dalle sinapsi, degli ispessimenti che permettono il passaggio degli impulsi elettrici tra i neuroni.

Le sinapsi possono avere un effetto inibitorio o eccitatorio sull'impulso elettrico trasmesso e secondo le ipotesi piu' recenti in esse e' la " sede" della memoria.

Il modello

I criteri con cui i processi di memorizzazione sono stati schematizzati hanno preso spunto dall'attivita' del cervello. In particolare si e' fatto riferimento agli esperimenti di Miyaschita sulla memoria visiva delle scimmie.

In tali esperimenti si e' visto tramite degli elettrodi, come, sottoponendo una scimmia ad uno stimolo visivo per un tempo di due secondi, nel suo cervello risultassero attivi solo determinati neuroni. L'immagine e' stata tolta e dopo un periodo di 16 secondi e' stata riproposta. Nei casi in cui la scimmia ha riconosciuto l'immagine si e' notato come nel suo cervello risultassero essere attivi proprio quei determinati neuroni che erano attivi in presenza dello stimolo iniziale.

A seguito di questi esperimenti il processo di memorizzazione e' stato interpretato come un ritorno del cervello ad configurazione neuronale uguale a quella che aveva nel momento dello stimolo iniziale.

Nel modello di Hopfield la rete neuronale viene rappresentata come un sistema costituito da N unita', i neuroni, che interagiscono fra loro nel tempo. Ad un certo istante t la rete e' rappresentata da un vettore ad N componenti

$$\{V(t)_1, V(t)_2, \dots, V(t)_N\} \quad (1)$$

ciascuna delle quali rappresenta l'attivita' di un neurone in quell' istante, in particolare $V_i(t) = 1$ se l' i -simo neurone e' attivo all'istante t e $V_i(t) = -1$ se il neurone e' quiescente.

Ad ogni istante di tempo t la rete e' caratterizzata da una configurazione determinata dai valori dei potenziali elettrici assunti dai neuroni.

In una rete cosi' schematizzata le informazioni , o patterns, vengono rappresentate da p vettori

$$\underline{\xi}^\mu = (\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \dots, \xi_N^\mu) \quad \mu = 1, \dots, p \quad (2)$$

$$\text{con } \xi_i^\mu = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}.$$

L'informazione viene quindi rappresentata da una configurazione della rete dove, per esempio, il primo neurone e' attivo, il secondo quiescente e cosi' via.

Gli impulsi esterni ricevuti, ad esempio un odore o la visione di un immagine, producono configurazioni differenti perche' diversi sono i neuroni stimolati dalle due percezioni.

Una simile rappresentazione delle informazioni e' analoga a come le informazioni vengono rappresentate nella memoria di un computer tramite bytes di variabili binarie.

Il potenziale che il neurone i -simo riceve dagli altri neuroni e' rappresentato mediante la somma, su tutti i restanti neuroni, dei potenziali che questi inviano al neurone i -simo :

$$\sum_{j \neq i} J_{ij} V_j \quad (3)$$

dove J_{ij} sono i coefficienti sinaptici, che determinano l'intensita' dell'interazione tra i neuroni e sono definiti mediante la seguente regola di Hebb :

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^P \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \quad (4)$$

Tale definizione dei coefficienti sinaptici rispecchia aspetti biologici per cui neuroni entrambi passivi o attivi tendono a rinforzare l'attivita' sinaptica.

La dinamica neuronale, ossia l'interazione tra i neuroni, e' rappresentata dal seguente sistema di equazioni

$$V_i(t+1) = \text{segno} \left(\sum_{j \neq i} J_{ij} V_j(t) - \theta_i \right) \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

dove θ_i rappresenta il valore soglia dell'i-simo neurone e la funzione segno assume il valore +1 se l'argomento e' positivo e valore -1 se l'argomento e' negativo. Un neurone risultera' attivo in un istante successivo se la somma dei potenziali elettrici, che riceve dagli altri neuroni, supera il suo valore soglia e cio' in analogia a quanto accade biologicamente.

La configurazione iniziale, che rappresenta lo stimolo esterno percepito, si ottiene perturbando con un fattore aleatorio δ_i il vettore in cui e' memorizzata l'informazione che si vuole riconoscere, ossia:

$$V_i(0) = \xi_i^{\mu} \delta_i \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Con questa scelta della dinamica e dei coefficienti sinaptici si ha che, iterando la dinamica, si ottiene una configurazione della rete neuronale uguale a quella dell'informazione $\underline{\xi}^{\mu}$, cioe' il pattern e' stato riconosciuto.

In una rete neuronale cosi' schematizzata e' indispensabile introdurre un parametro che permetta di confrontare tra loro due configurazioni, per poter stabilire se un'informazione e' stata riconosciuta. Tale parametro e' il parametro di overlap definito da:

$$m^{\mu}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^{\mu} V_j(t) \quad (7)$$

Si osservi che tale parametro assume valori compresi tra -1 ed 1 e che si ha il riconoscimento totale di un'informazione quando esso assume valore 1 ossia quando la rete e' tornata in una configurazione identica a quella che definisce l'informazione.

BIBLIOGRAFIA

1. J. HOPFIELD, *Proceedings of the National Academy of Science*, USA Vol 79, pp 2554-2558, Biophysics, Aprile 1982
2. B.TIROZZI e S.DORIA, *Highly Diluted Asymmetrical Neural Networks*, Atti del Convegno "Stochastic Process- Geometry and Physic" Locarno, Svizzera, 1991.
3. D. AMIT, *Modelling Brian Function: the world of attractor neural network*, N.Y. Cambridge University Press ads, 1989.
4. A. MATURO, *Numeri pseudocasuali*, Libreria dell'Universita' Editrice Pescara, 1989
5. C.CIARLANTE, S.DORIA e A.MATURO, *Glicine: suo tropismo e sua intelligenza*, Atti del Convegno Nazionale " Protezione delle culture: osservazioni, previsioni, decisioni" Pescara, 1993.