

## CONSIDERAZIONI SUL TEOREMA DI HEINE-PINCHERLE-BOREL

Carlo Tosone

**SUNTO** - Questo lavoro propone un esempio, in uno spazio metrico, di un sottoinsieme chiuso e limitato che non è compatto.  
Nella prima parte vengono richiamati alcuni noti concetti di topologia associata ad uno spazio metrico, utili per la dimostrazione successiva.

**ABSTRACT** - This work contains an example, within a metric space, of a closed and limited under-whole which is not compact.  
In the first part, some well-known concepts, about topology relating a metric space, are recalled, useful for the subsequent demonstration.

## INTRODUZIONE

Si richiamano brevemente alcune classiche nozioni sulla topologia indotta da uno spazio metrico.

Siano  $(X,d)$  uno spazio metrico. Fissato  $r \in [0,+\infty)$  ed  $x \in X$ , il sottoinsieme

$U_{x,r} = \{y \in X: d(x,y) < r\}$  e' detto sfera aperta di centro  $x$  e raggio  $r$ .

Sia  $T$  la topologia indotta in  $X$  dalla metrica  $d$ , ossia la topologia che ha per base di aperti le sfere aperte.

Indichiamo con  $(X,T)$  lo spazio topologico con la topologia indotta dalla metrica  $d$ .

Un sottoinsieme  $Y$  di  $X$  dicesi compatto se ogni ricoprimento di aperti di  $Y$  contiene un sottoricoprimento finito di  $Y$ . E' noto che in uno spazio topologico di Hausdorff ogni compatto e' un chiuso quindi, poiche' uno spazio metrico con la topologia indotta e' di Hausdorff, in  $(X,d)$  i compatti sono chiusi.

Inoltre si puo' dimostrare che i compatti di uno spazio metrico sono limitati, cioe' contenuti in sfere aperte.

In  $(X,d)$  si ha quindi la seguente implicazione:

$Y$  compatto  $\Rightarrow Y$  chiuso e limitato.

Non e' vera, in generale, l'implicazione opposta.

Alla fine del secolo XIX i matematici Heine, Pincherle e Borel dimostrarono il seguente teorema:

i compatti in  $\mathbb{R}^n$ , spazio metrico euclideo, sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati.

In questo articolo si espone un esempio di sottoinsieme, di uno spazio metrico, chiuso e limitato che non è compatto.

L'esempio e' di interesse didattico poichè, pur presentando una problematica delicata, fornisce, utilizzando soltanto i numeri razionali e quindi un ambiente ben noto agli allievi, una costruzione di tale sottoinsieme nella quale viene riletto, con altro occhio, un limite fondamentale.

### 1. SUCCESSIONI DI CAUCHY E SPAZI METRICI.

Una successione  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di punti di  $X$ , si definisce successione di Cauchy se risulta:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu, d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Si dice che una successione  $\{y_n\}$  di punti di  $X$  converge ad  $l \in X$  se risulta:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu, d(l, y_n) < \varepsilon.$$

E' noto che ogni successione convergente è di Cauchy, ma in generale non vale il viceversa.

Le successioni convergenti sono tutte e sole le successioni di Cauchy negli spazi metrici completi, ovvero per definizione  $(X,d)$  si dice completo se ogni successione di Cauchy e' convergente, altrimenti si dice incompleto.

In uno spazio metrico non completo, il codominio di una qualunque successione di Cauchy non convergente e' un sottoinsieme chiuso e limitato, ma non è compatto.

## 2. ESEMPIO DI UN SOTTOINSIEME CHIUSO E LIMITATO NON COMPATTO.

Sia  $(X,d)$  uno spazio metrico non completo, si consideri una successione  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di Cauchy non convergente.

Posto  $Y = \{y_n\}$  dimostriamo che :

$Y$  è un sottoinsieme chiuso, limitato ed infinito.

Dim.

1)  $Y$  è un chiuso :

l' insieme  $Y$  contiene tutti i suoi punti di accumulazione , in quanto il derivato di  $Y$  è vuoto. Infatti se esistesse un punto  $l \in X$  di accumulazione per  $Y$ , essendo  $y_n$  una successione di Cauchy ,  $y_n$  sarebbe convergente ed il suo unico limite sarebbe  $l$  , in contrasto con quanto supposto riguardo alla non convergenza di  $y_n$ .

2)  $Y$  è limitato :

dalla definizione di successione di Cauchy è facile dimostrare l' asserto.

3)  $Y$  e' infinito :

invero se  $Y$  fosse un insieme finito , la successione  $y_n$  dovrebbe assumere un certo valore  $l$  un numero infinito di volte; essendo di Cauchy, risulterebbe definitivamente costante e quindi convergente contro l' ipotesi fatta.

Proviamo allora la seguente :

Se  $Y = \{y_n\}$  è una successione di Cauchy non convergente allora  $Y$  non è compatto.

Dim.

La dimostrazione viene fatta per assurdo supponendo che  $Y$  sia compatto.

Poiche'  $D(Y) = \emptyset$ ,  $\forall y \in Y$  esiste un intorno aperto  $U_y$  tale che  $U_y \cap Y = \{y\}$ . Essendo  $\{U_y\}_{y \in Y}$  un ricoprimento aperto di  $Y$ , se  $Y$  fosse compatto conterrebbe un sottoricoprimento finito di  $Y$ , ovvero si avrebbe  $Y \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{y_{i_k}}$  e quindi :

$$Y = Y \cap \left( \bigcup_{k=1}^n U_{y_{i_k}} \right) = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}\}.$$

E' ovvio l' assurdo in quanto  $Y$  è un sottoinsieme infinito di  $X$ .

Illustriamo con un esempio la proposizione appena dimostrata. Consideriamo come spazio metrico non completo l' insieme dei numeri razionali  $Q$ , con la metrica indotta dalla metrica euclidea di  $R$ . In  $Q$  esistono infinite successioni di Cauchy non convergenti, tra le quali la successione  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Come è noto in  $R$  esiste il limite di tale successione ed è il numero di Nepero  $e$ . Il numero  $e$  è un irrazionale e quindi non appartiene all' insieme  $Q$ . La successione  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  assume valori appartenenti all' intervallo  $[2,3)$ , cioè è limitata. Inoltre, poichè è monotona strttamente crescente, è a codominio infinito. Essendo una successione di razionali è un sottoinsieme chiuso di  $Q$ .

E' facile verificare che  $Y = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  non è un sottoinsieme compatto di  $Q$ .

Infatti, i punti dell' insieme  $Y$  sono tutti punti isolati e pertanto per ogni  $y \in Y$  esiste un aperto  $A_y$ :  $A_y \cap Y = \{y\}$ .

E' possibile, cioe', costruire una successione di aperti nella maniera che segue :

$$A_1 = \text{aperto tale che } A_1 \cap Y = \{y_1\};$$

$$A_2 = \text{aperto tale che } A_2 \cap Y = \{y_2\};$$

.....

$$A_n = \text{aperto tale che } A_n \cap Y = \{y_n\};$$

La successione di aperti  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un ricoprimento di  $Y$  che non contiene alcun sottoricoprimento finito, avendosi :

$Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  ma posto  $I = \mathbb{N} - \{i\}$  con  $i \in \mathbb{N}$ , risulta  $Y$  non incluso nell'

$\bigcup_{n \in I} A_n$  in quanto  $y_i \in Y$  e  $y_i \notin A_n \forall n \in I$ .

Osserviamo che se si considera  $Y$  come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}$  è uno spazio metrico completo)  $Y$  non è compatto in  $\mathbb{R}$ , ma ciò non contrasta con il teorema di Heine-Pincherle-Borel. Risulta che  $Y$  non è, invero, un chiuso di  $\mathbb{R}$ , perchè non contiene il punto  $e \in \mathbb{R}$ , che è di accumulazione per  $Y$ . È opportuno precisare che esempi analoghi si ottengono considerando un qualunque campo  $K$ , isometrico a  $\mathbb{Q}$ , una successione di Cauchy non convergente, cioè che abbia per limite un punto del completamento dello spazio metrico  $K$ . Più in generale, non è necessario che lo spazio metrico considerato abbia le stesse caratteristiche di  $\mathbb{Q}$ , ma è sufficiente supporre che sia incompleto.

#### BIBLIOGRAFIA

1. GIUSEPPE TALLINI, *Strutture geometriche*, Liguori, Napoli 1987.
2. FEDERICO CAFIERO, *Lezioni di analisi Matematica*, Liguori, Napoli 1980.