Ratio Math. 8
(1994), 29 - 57

UNA RASSEGNA DEI RISULTATI E DELLE PROSPETTIVE DEI SISTEMI DIGITALI MULTICANALE

Fabio Mercanti*

SUNTO - Si illustra la problematica che ha dato origine alla teoria dei *Sistemi Digitali Multicanale* (SDM), nozione che generalizza quella di sistema inteso nella sua più ampia accezione, ricordando i *principali risultati* ottenuti particolarmente nel campio *biologico* ed *economico*. Si prospettano inoltre *problemi* tuttora *aperti*, che possano essere affrontati utilizzando detta teoria. Infine si esegue una breve analisi di studi similari, abbozzando un succinto confronto critico con la teoria dei SDM.

ABSTRACT - In this paper the *theory* of the *Multichannel Digital Systems* (SDM) has been outlined, starting from the previous concepts of *neuromachine* and of *semiautomaton*. An SDM is a generalization of a *dynamic system*, whose *states* are made by *codificated information* through certain *algebraic-combinatory* structures. Moreover some still open *biological* and *economical* problems have been prospected through the theory of the SDM. At last a brief analisys of similar studies has been performed, sketching a synthetical critical comparison with the above mentioned Theory.

* Politecnico di Milano, via Bonardi 3.

INTRODUZIONE

0. Come è detto in MELZI-MERCANTI [22], MELZI [19], un *Sistema Digitale Multicanale* (SDM) è un *sistema dinamico,* lo *stato iniziale* e *l'imput-output* del quale sono costituiti da *informazione codificata* in *parole,* su un dato *alfabeto,* interagenti secondo il meccanismo *algebrico-combinatorio* illustrato nei §§ 8,9,10.

Nella sua accezione più generale il concetto di sistema (vedere per esempio BERTALANFFY [3]) è quello di un ente fisico che, sottoposto ad una data azione attraverso un'entrata, fornisce come conseguenza una certa uscita. Se il sistema evolve nel tempo, nel senso che l'azione sul sistema avviene nel tempo, esso viene più propriamente detto sistema dinamico (vedere per esempio RINALDI [39]). Un sistema dinamico, nel senso tradizionale del termine, scambia con l'esterno grandezze soprattutto *fisiche.* Esso possiede uno *stato istantaneo,* opportunamente descrivibile mediante certe *variabili numeriche* funzioni le une delle altre, nonché del tempo.

Il fatto che, al contrario, un SDM sia descrivibile con particolari meccanismi algebrico-combinatori, agenti su informazione opportunamente codificata, lo rende particolarmente adatto alla formulazione di *modelli matematici* per lo studio di vari oggetti e fenomeni naturali, come ad esempio *sistemi biologici, sistemi economici, sistemi di edifici rispetto ai processi di manutenzione e degrado, fenomeni sismici,* ecc.. Se infatti l'idea tradizionale di sistema è dominata dai concetti di *proporzionalità e continuità,* l'idea di SDM è invece dominata dalla nozione di *soglia,* ossia dal fenomeno per il quale stimoli inferiori ad una certa intensità critica non provocano alcuna risposta in un dato sistema (MERCANTI [29]).

Un esempio tipico di risultato in tal senso può trovarsi in MERCANTI [27], dove si *descrive* e si *giustifica* un particolare fenomeno della percezione, ritrovando e giustificando i risultati che si ottengono *sperimentalmente.*

L'impostazione assiomatica delle teorie esposte in questo lavoro forma una base interpretativa dei fenomeni nervosi, nel senso che consente di fondare una *teoria matematica dei fenomeni mentali* in senso lato.

In modo del tutto simile i risultati possono essere estesi ai *sistemi economici* (micro e macro).

La nozione di *Sistema Digitale Multicanale* (SDM) sintetizza ed unifica vari *modelli matematici,* proposti da Giovanni Melzi (1931-1992) e dalla sua Scuola a partire, con i primi lavori [13], [14], [15], dagli anni '70. In particolare con la teoria dei *Sistemi Digitali Multicanale* si sono riunite le due teorie, quella delle *Neuromacchine* e quella dei *Semiautomi,* in precedenza proposte. Questo lavoro di *survey* ripercorre il cammino della ricerca, dagli inizi fino ai più recenti sviluppi ottenuti dall'autore di questo articolo.

1. Nel prosieguo del survey ci si occupa essenzialmente di quattro sezioni. Nella prima sezione, LA TEORIA DELLE NEUROMACCHINE, si tratta di modelli matematici per la descrizione della corteccia cerebrale (MELZI [16]), dei primi risultati e teoremi da essi derivati, relativi alla *computazione*, ottenuti da CAROTTI, MERCANTI, PIAZZESE in [30], [24], [31], [25], [6], e dell'*adeguatezza* della teoria matematica posta alla base del procedimento usato (MERCANTI [26], MELZI-MERCANTI [20]).

Nella seconda sezione, LA TEORIA DEI SEMIAUTOMI, si supera l'aspetto strettamente neurale dei precedenti lavori introducendo, attraverso il già citato meccanismo algebrico-combinatorio e la teoria ad esso associata, i concetti di *automa digitale*, *modello matematico* degli stati di un *modello biologico*, e di *semiautoma*, costituito da un automa digitale e due *osservatori*, opportunamente interagenti con esso (MELZI-MERCANTI [21]).

Nella terza sezione, LA TEORIA DEI SISTEMI DIGITALI MULTICANALE, viene formalizzata la definizione di SDM e si espongono alcuni contributi dell'autore di questo lavoro (cfr. [28]) sull'interpretazione degli SDM, come *modelli matematici* delle proprietà di un *sistema economico*. Nella quarta sezione, PROBLEMI APERTI, si indicano le prospettive di studio aperte dagli SDM.

Infine nelle CONCLUSIONI si discutono brevemente i criteri di scelta della ricerca, confrontandoli con quelli di altri studi sull'argomento.

LA TEORIA DELLE NEUROMACCHINE

2. L'idea primitiva, sulla quale si basano i risultati esposti in questo lavoro, è quella di *neuromacchina*, introdotta da Melzi nel 1981 nel suo lavoro [16]. Una *neuromacchina* è una *macchina elaboratrice astratta* costruita, per assiomi e definizioni, in modo da possedere *prestazioni* e *strutture* tali da essere concepite, rispettivamente, come *schemi*, opportunamente semplificati, dei *processi mentali* e *schemi* accettabili delle *strutture nervose*. Essa è costituita da un insieme di *moduli* comunicanti tra loro in modo opportuno.

2.1. Un modulo, o neuromacchina elementare, è una *unità elaboratrice di informazione*, dotata di un *canale di entrata* e di un *canale di uscita*. Nel modulo risiedono certe *neuroparole materiali*, costituite da *neurocaratteri materiali*, conformemente alle regole di buona formazione di una data *grammatica* assai semplice[1] .

2.2. I singoli neurocaratteri materiali (detti allo *stato disperso*) e le neuroparole materiali vengono elaborate dal modulo: si formano in tal modo nuove neuroparole materiali, l'insieme delle quali viene detto *stato* del modulo, ad un *tempo dato*. Uno dei possibili stati è detto *stato iniziale*.

2.3. Il modulo può anche separare i neurocaratteri delle neuroparole materiali, riportandoli allo stato disperso (cfr. 2.2).

2.4. L'elaborazione delle neuroparole del modulo ed i suoi cambiamenti di stato dipendono dagli inputs (*stimoli*), rappresentati da copie di neuroparole materiali (*neuroparole binarie*)[2] , in corrispondenza biunivoca con esse[3] .

2.5. Le neuroparole materiali, costruite dal modulo, vengono cancellate dal modulo e le loro copie binarie, neuroparole binarie, vengono trasmesse in output (*risposte*). Le neuroparole materiali che si formano in un modulo, come conseguenza della circolazione di una neuroparola binaria, non

---

1 Nel modulo risiedono *caratteri materiali*, copie materiali dei caratteri di un *alfabeto finito* c_0, c_1, ..., c_{h-1}, detto *alfabeto materiale*, comprendente un simbolo privilegiato denotato con «•», in generale coincidente con c_0. Una neuroparola materiale è un allineamento ordinato dei precedenti neurocaratteri. In particolare, si chiama *liscia* una neuroparola non contenente occorrenze del carattere «•» e si usano le lettere latine maiuscole nel senso di variabili, indicanti neuroparole materiali non ridotte a singoli neurocaratteri. Inoltre, con evidente significato dei simboli, si dice che neuroparole del tipo $\bullet A$, $B\bullet$, $\bullet C\bullet$ sono, rispettivamente, *chiusa a sinistra*, *chiusa a destra* o, semplicemente, *chiusa*. Analogamente si può parlare di neuroparole *aperte* nello stesso senso. Le neuroparole lisce, con cui terminano le neuroparole aperte a destra, prendono il nome di *suffissi*; le neuroparole, con cui iniziano le neuroparole aperte a sinistra, sono dette *prefissi*. Per esempio, nelle neuroparole materiali $\bullet A_1\bullet A_2\bullet\ldots\bullet A_r\bullet B$, $\bullet$ $C\bullet D_1\bullet\ldots\bullet D_s\bullet E$, $F\bullet G_1\bullet\ldots\bullet G_t$, B, E sono suffissi e C, F prefissi. Si dice, inoltre, che una neuroparola materiale è *feconda*, se è composta da neuroparole materiali lisce tutte chiuse, tranne eventualmente l'ultima, che può essere aperta a destra. Per esempio le neuroparole $\bullet A_1\bullet A_2\bullet\ldots\bullet A_r\bullet$ e $\bullet A_1\bullet A_2\bullet\ldots\bullet A_r\bullet B$, con A_1, A_2, ..., A_r, B tutte lisce, sono entrambe feconde. Si conviene, infine, che l'insieme delle neuroparole materiali comprenda una neuroparola materiale *muta*. La costruzione delle neuroparole avviene, con evidente significato dei termini, a secondo che le parole stesse siano o no aperte, aperte a destra, aperte a sinistra.

2 Per la costruzione delle neuroparole binarie vale, ovviamente, la stessa grammatica utilizzata per la costruzione delle neuroparole materiali (cfr. nota 1).

3 L'*applicazione iniettiva* γ, che consente di stabilire tale corrispondenza, viene detta *codice binario*.

coincidono in generale con quelle contenute nel suo stato iniziale e vengono perciò chiamate *neoformate*.

2.6. Il *comportamento* della neuromacchina è regolato da un sistema formato da *quattro assiomi*[4], che assegnano le modalità di cambiamento di stato dei moduli e le conseguenti risposte.

In particolare, gli elementi introdotti sopra hanno, nella descrizione ipotetica della *corteccia cerebrale*, il seguente significato.

2.7. I moduli (cfr. 2.1) rappresentano le *colonne* della corteccia cerebrale.

2.8. I neurocaratteri materiali (cfr. 2.1) rappresentano l'*RNA solubile*, presente in ogni neurone e quindi in ogni colonna.

2.9. Le neuroparole materiali (cfr. 2.1) rappresentano lo schema di un tratto completo di RNA capace di *codificare una catena polipeptidica*.

---

4 Si riportano gli assiomi di funzionamento di una neuromacchina, così come enunciati da Melzi in [16]. In essi con γ^{-1} si intende l'applicazione inversa del codice binario (cfr. nota 3).

PRIMO ASSIOMA. Ogni modulo $\mathcal{H}_j$ componente una neuromacchina $\mathcal{H} = \mathcal{H}_j$ (j = 1, 2, ..., n, ...) contiene inizialmente un insieme α_j, funzione di j, di neuroparole materiali allo stato latente, e ricostruisce tutte e sole queste neuroparole durante ogni intervallo temporale δ_i di indice i pari quando esse sono state cancellate nell'intervallo precedente δ_{i-1}.

SECONDO ASSIOMA. Le neuroparole binarie circolano in $\mathcal{H}_j$ solo negli intervalli temporali δ_i di indice *i* dispari. Se in un intervallo temporale δ_i di indice dispari circola in $\mathcal{H}_j$ una neuroparola binaria $\gamma^{-1}(XY)$, corrispondente di una neuroparola materiale XY, e in $\mathcal{H}_j$ risiedono una neuroparola materiale del tipo $\bullet A \bullet X$ e una neuroparola materiale del tipo $Y \bullet B$ (X e Y lisce e aperte, A aperta, B aperta a sinistra, lisce o no, eventualmente vuote), allora entro l'intervallo temporale δ_i le neuroparole materiali $\bullet A \bullet X$ e $\bullet Y \bullet B$ vengono cancellate da $\mathcal{H}_j$, e in questo modulo vengono a risiedere le neuroparole materiali $\bullet A \bullet$ e $\bullet B$.

TERZO ASSIOMA. Se in un intervallo temporale δ_i di indice *i* dispari nel modulo $\mathcal{H}_j$ si forma una neuroparola materiale chiusa del tipo $\bullet A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_r \bullet$, con A_1, A_2, ..., A_r lisce, allora tale neuroparola viene cancellata nel corso dell'intervallo pari successivo δ_{i+1} e nell'intervallo dispari δ_{i+2} in $\mathcal{H}_j$ circolano le copie binarie delle neuroparole A_h ($h = 1, 2, \ldots, r$).

QUARTO ASSIOMA. Se in un intervallo temporale δ_i di indice dispari in un modulo $\mathcal{H}_j$ circola la copia binaria $\gamma^{-1}(A_h)$ di una componente liscia di una neuroparola materiale neoformata in $\mathcal{H}_j$, la neuroparola binaria $\gamma^{-1}(A_h)$ circola, nello stesso intervallo di tempo, in tutti i moduli di $\mathcal{H}$.

2.10. Lo stato (cfr. 2.2), ad un tempo dato, di ogni modulo rappresenta il patrimonio di RNA *messaggero* di cui dispongono i neuroni.

2.11. Lo stato iniziale (cfr. 2.2) di un modulo rappresenta lo *stato di attenzione*.

2.12. Le neuroparole binarie rappresentano (cfr. 2.4) uno schema della *trasmissione sinaptica*.

3. In MERCANTI-PIAZZESE [30] si dimostra che, per ogni assegnata *macchina di Turing*, esiste almeno una neuromacchina ad essa equivalente. La dimostrazione richiede alcune precisazioni sul concetto di *equivalenza* tra una neuromacchina ed un automa generico. La dimostrazione consiste nella costruzione diretta e finitistica di una opportuna neuromacchina, da dimostrare equivalente ad una macchina di Turing comunque assegnata. La neuromacchina richiesta è assegnata mediante il suo stato iniziale (cfr. 2.2), costituito da opportune neuroparole materiali (cfr. 2.1) legate, attraverso certi *legami funzionali*, alle variabili che individuano la macchina di Turing, e cioè al *nastro* ed alla *testina*, ed alle funzioni di *start e di output dell'elaborazione*.

In MERCANTI [24] si dimostra che il passaggio, dalla nozione di macchina di Turing a quella di *macchina di Turing universale*, è del tutto spontaneo in termini di teoria delle neuromacchine, nel senso che è molto facile calcolare una neuromacchina che, sotto impulsi appropriati, si atteggia a neuromacchina equivalente a qualsiasi macchina di Turing, potendo assumere stati iniziali (cfr. 2.2.) corrispondenti ad ogni assegnata macchina di Turing.

4. Il problema di progettare una neuromacchina possedente un assegnato comportamento conduce all'idea di *S-sistema* (MERCANTI-PIAZZESE, [31]), insieme finito o infinito di unità elaboratrici di informazione intercomunicanti, che si scambiano *informazione codificata* secondo una stessa *grammatica* su di uno stesso *alfabeto*. In taluni casi l'informazione scambiata è significativamente esprimibile in linguaggi comunque assegnati, compreso quello comune. Se la grammatica che regola l'informazione scambiata fra le unità di un S-sistema, soddisfa certe semplici restrizioni di carattere *finitistico*, per esempio se la grammatica è la stessa usata per la costruzione delle neuroparole materiali di 2.1, si dimostra che una neuromacchina è equivalente a un S-sistema e, viceversa, si dimostra che un S-sistema, con oppportune restrizioni, è equivalente ad una neuromacchina. La dimostrazione consiste nell'indicare i criteri di costruzione effettiva dei moduli (cfr. 2.1) di una neuromacchina, equivalente ad un S-sistema assegnato.

Nel lavoro di MERCANTI [25] si forniscono alcune precisazioni sul fatto che un S-sistema possa essere concepito come la *forma canonica*, rispetto al *gruppo* E delle neuromacchine E-*equivalenti*, nel senso prima indicato, di un processore di informazione, e quindi la *forma canonica di una neuromacchina*.

5. Il problema di costruire neuromacchine di dato comportamento (cfr. § 4), conduce spontaneamente al problema della loro *simulazione* mediante il *computer*. Per fare ciò sono necessarie alcune precisazioni, nel caso di neuromacchine nelle quali risiedano molte copie di molte neuroparole (*folle di neuroparole*). In tal senso in CAROTTI [5], [4], il comportamento (cfr. 2.6) di una neuromacchina è descritto con un insieme di *processi stocastici poissoniani*. Si addiviene così al concetto di grande neuromacchina (*continua*), come estensione del concetto di neuromacchina (*digitale*) di Melzi.

In tal modo in CAROTTI-MERCANTI [6] si descrivono alcuni risultati di carattere esclusivamente *sperimentale*, ottenuti con il computer, relativi al funzionamento stocastico di grandi neuromacchine. In virtù degli assiomi che descrivono tale funzionamento (cfr. 2.6), si può infatti prevedere intuitivamente l'esistenza di *processi stabili* e di *processi instabili*, come quelli nei quali, rispettivamente, il numero delle neuroparole circolanti nell'unità di tempo *tenda a zero* oppure *tenda all'infinito*, al divergere del tempo. Gli esperimenti descritti in [6] provano che il carattere di stabilità, o di instabilità, di un processo di una neuromacchina dipende solo dallo stato iniziale (cfr. 2.2) e non dagli stimoli introdotti nella neuromacchina (cfr. 2.4), purché questi occupino un intervallo finito di tempo. I risultati ottenuti sperimentalmente costituiscono la *simulazione di fenomeni nervosi* (per esempio, le folle di neuroparole potrebbero essere un *modello delle folle di proteine sintetizzate* in conseguenza alla *percezione* di una sensazione anche complessa), anche se conviene sottolineare che i processi, studiati sperimentalmente sul computer, danno una simulazione dei processi che avvengono in una neuromacchina e che questa è, soltanto, a sua volta, una simulazione del sistema nervoso o di una sua parte. In tal senso, quanto detto, ha valore solamente come *simulazione del secondo ordine* del sistema nervoso reale.

6. Altri contributi, nati collateralmente alla ricerca sulle neuromacchine, si trovano in RESCONI [38], dove si assegna, per un *sistema fisico* ad un numero finito qualunque di coordinate libere discretizzate, una *classe molto estesa di processi generativi*, per i quali l'annullamento asintotico dell'entropia è una conseguenza algebrica della loro definizione; in PERELLI CIPPO-VENINI [35], dove il meccanismo della *doppia verifica*

materiale, caratteristica delle teoria dei neuromodelli (MELZI [14]), viene ulteriormente snellito attraverso una neuromacchina *atta al calcolo enunciativo*; in ISONNI [8], dove si assegna fattualmente una neuromacchina, detta neuromacchina *sequenziale*, il comportamento della quale è un modello del *gruppo additivo* dell'insieme degli interi; e in PIAZZESE [36] dove per la prima volta viene, anche se ancora informalmente, proposta *l'applicazione* della *teoria dei sistemi* allo studio della teoria delle neuromacchine.

7. In MERCANTI [26], MELZI-MERCANTI [20] vengono analizzati, risistemati e uniformati i risultati ottenuti, discutendo l'*adeguatezza* del sistema di assiomi (cfr. § 2) e di alcuni teoremi della teoria da essi derivata (cfr. §§ 3, 4, 5, 6).

In particolare si osserva quanto segue.

7.1. Accettare come *adeguati* gli assiomi di comportamento di una neuromacchina, significa essenzialmente concepire l'attività della corteccia cerebrale come l'*evoluzione* di un sistema biochimico.

7.2. Gli assiomi configurano un'ipotesi semplicissima sul significato di *patterns corticali*, ammettendo, in sostanza, che ogni pattern sia la *copia* di un *RNA messaggero* e che ogni *proteina* dia luogo ad un pattern.

7.3. Per contro la *schematizzazione* della corteccia, data dagli assiomi (cfr. da 2.7 a 2.12), la configura come un *sistema deterministico*, in contrasto con la comune opinione che il sistema nervoso possegga determinate proprietà di sistema *plastico*, *autoregolato* e addirittura *teleonomico*. Tuttavia l'assiomatica proposta può essere integrata con *assiomi probabilistici* (cfr. § 5), che sembrano adatti a simulare le più elementari almeno di queste proprietà.

Anche nel caso che il sistema di assiomi del § 2 non risultasse adeguato, i risultati ottenuti potrebbero essere trasportati in un'altra assiomatica, ritenuta più adeguata, con le dovute modifiche. Ciò che conta è di poter disporre di una opportuna tecnica deduttiva. In tal senso sono da riguardarsi i primi risultati ottenuti ed illustrati nei precedenti §§ 2, 3, 4, 5, 6.

La discussione critica, sull'adeguatezza del metodo usato, e la esigenza di un linguaggio meno rudimentale e di un simbolismo meno complicato, conducono ad una *revisione* del metodo stesso, come meglio specificato in MELZI-MERCANTI [21].

LA TEORIA DEI SEMIAUTOMI

8. Il concetto di *semiautoma*, cui è dedicata questa sezione, generalizza la nozione di neuromacchina e unifica i modelli finora studiati. In particolare, la struttura algebrica (estensione dell'algebra di Boole) allo scopo introdotta, conduce dapprima al concetto di *automa digitale* (§ 9) e, successivamente, a quello di *semiautoma* (§ 10), consentendo di superare l'aspetto, esclusivamente *neurale*, dei procedimenti adottati in precedenza. In [21] viene descritta, dunque, una *trattazione algebrico-combinatoria dei processi di trasformazione* avvenenti in un insieme di parole materiali (cfr §2), impiegando i concetti ed i simboli della *teoria delle categorie*, nel senso di MAC LANE [12]. In tal modo sembra conveniente lo studio del sistema nervoso reale, inteso come *processore d'informazione*, piuttosto che come *apparato fisiologico*. In questa nuova sistemazione è possibile ottenere (§ 11) un significativo risultato nel campo della percezione (MERCANTI [27]).

8.1. Il linguaggio e la simbologia usati si trovano in [21]. Con opportune precisazioni, ivi si considera un *alfabeto* T costituito da un numero finito di caratteri. Le *parole* su T costituiscono una *grammatica* $\mathcal{G}$, nel senso più volte precisato in precedenza[5]. Detto P($\mathcal{G}$) l'insieme delle parti di $\mathcal{G}$, gli elementi di P($\mathcal{G}$) formano un'*algebra di Boole* $\mathcal{B}$. Introducendo alcune altre opportune *relazioni*, oltre a quelle sussistenti in $\mathcal{B}$, e similmente altre *operazioni*, dette *$\mathcal{A}$-operazioni*, tra le parole di $\mathcal{G}$, si ottiene una *struttura algebrica* $\mathcal{A}$, *estensione* di $\mathcal{B}$. Le $\mathcal{A}$-operazioni (come suggerisce anche il loro nome: *selezione, selezione destra, selezione sinistra, taglio e concatenazione*) sono *verosimili modelli* delle operazioni di *sintesi polipeptidica* (cfr. 7.1, 7.2, 7.3)[6].

8.2. Le $\mathcal{A}$-operazioni di 8.1 valgono anche per *insiemi di parole*

$$X,Y,... \in P(\mathcal{G}).$$

A P($\mathcal{G}$) appartiene anche la parola *muta* $\varnothing$, intesa come priva di caratteri.

8.3. L'insieme dei *termini* dell'algebra $\mathcal{A}$, che prendono il nome di *$\mathcal{A}$-espressioni*, viene definito *ricorsivamente* nei confronti delle operazioni di

---

5 Cfr. nota 1.

6 Le definizioni delle cinque operazioni tra le parole di $\mathcal{G}$ non sono qui riportate per brevità. Esse si trovano in [21], §2.

$\mathcal{A}$ (e di $\mathcal{B}$). Una $\mathcal{A}$-espressione, contenente le *variabili*[7]

$$X_1, X_2, \dots, X_k. \tag{1}$$

è denotata con

$$E(X_1, X_2, \dots, X_k). \tag{2}$$

Per ogni valore assegnato alle variabili, cioè per ogni insieme

$$\varnothing, X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, \mathcal{G},$$

una $\mathcal{A}$-espressione denota un insieme

$$W \in P(\mathcal{G}),$$

detto *valore* dell'espressione.

8.4. Analogamente a quanto fatto per le $\mathcal{A}$-operazioni (cfr. 8.1) e per le $\mathcal{A}$-espressioni (cfr. 8.3), sarà possibile definire gli $\mathcal{A}$-*predicati* di $\mathcal{A}$ in maniera *ricorsiva*, partendo dai *segni predicativi* delle algebre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (cfr.8.1). Si parlerà, allora, di $\mathcal{A}$-predicati contenenti certe *costanti* date A,B,..., oppure certe *variabili* date X,Y,..., di predicati *aperti* o *chiusi*, e così via. L'insieme (*numerabile*) di tutti gli $\mathcal{A}$-predicati costituisce l'insieme delle *formule ben formate* di una *teoria formalizzata* del *primo ordine*, descrivente l'algebra $\mathcal{A}$ di 8.1 (MELZI [18], § 5).

8.5. Data una $\mathcal{A}$-espressione (cfr. (2))

$$E(X_1, X_2, \dots X_k),$$

è definita un'*applicazione* di $\mathcal{A}^k$ in $\mathcal{A}$, detta $\mathcal{A}$-*funzione*, per la quale (cfr. (1))

$$X_1, X_2, \dots X_k$$

sono le variabili *indipendenti* ed $E(X_1, X_2, \dots X_k)$ è il valore (cfr. 8.3).

---

7 Il concetto di *variabile*, nel senso tradizionale del termine, viene qui usato, con ovvio significato, per le parole di $P(\mathcal{G})$ (cfr. anche nota 1).

8.6. Particolare rilevanza assume, nel seguito, il concetto di funzione *omogenea* (si userà da ora la dizione di funzione, invece di quella di $\mathcal{A}$-funzione). Una funzione di *due variabili*

$$F(X,Y), \tag{3}$$

con X, Y $\in P(\mathcal{G})$ (cfr. 8.2), si dice *omogenea* se per ogni $X \in P(\mathcal{G})$ risulta

$$F(X,\varnothing)=X,$$

con $\varnothing$ parola muta (cfr. 8.2). Per esempio la funzione $X \cup Y$ è omogenea, mentre la $X \cap Y$ non lo è.

8.7. Sia F(X,Y) una funzione omogenea (3) e siano X_F, $Y_F \subseteq P(\mathcal{G})$ due *classi* di insiemi di parole, per le quali valgano opportune condizioni, dette condizioni di *stabilità* ([21], § 4). Si dimostra che sotto tali ipotesi è definita una *categoria* C_F[8], nel senso già ricordato di MAC LANE [12], per la quale risulta[9]

$$\mathrm{Ob}\, C_F = X_F$$

e

$$\mathrm{Mor}\, C_F = Y_F.$$

Questa categoria dipende ovviamente da F, X_F e Y_F, ma, per gli scopi che seguiranno, Y_F sarà *indipendente* sia da F sia da X_F. Perciò tale categoria sarà più spesso denotata con

$$C(F,X_0), \tag{4}$$

con X_0 insieme di parole che individuano X_F.

9. Ad ogni categoria $C(F,X_0)$, come quella descritta nella (4) di 8.7, si può associare un *automa digitale*

$$H(F,X_0),$$

per il quale accada quanto segue ([21], § 7).

---

8 L'idea di categoria va intesa, in questo contesto, nel senso di universo di *oggetti* legati da *relazioni* tra loro moltiplicabili.

9 La categoria C_F è quella per la quale gli *oggetti* (Ob) sono gli *elementi* (insiemi di parole) $X \in X_F$ e i *morfismi* (Mor) sono particolari applicazioni di X_F in X_F composte, in modo opportuno.

9.1. Ogni *insieme di parole* $X \in \mathrm{Ob}\, C(F,X_0)$ (cfr. 8.7) è uno *stato* di $H(F,X_0)$, e in particolare X_0 è lo *stato iniziale*.

9.2. Ogni *insieme* $Y \in \mathrm{Mor}\, C(F,X_0)$ (cfr. 8.7) è un *input* per $H(F,X_0)$.

9.3. *Il tempo è discreto*; se al tempo i lo stato di $H(F,X_0)$ è X e l'input Y, lo stato al tempo i+1 diventa F(X,Y).

9.4. Ogni *successione di insiemi*

$$X_j \ (j = 1,2,...k). \tag{5}$$

tale che

$$X_{j+1} = F(X_j, Y). \tag{6}$$

per qualche $Y \in Y_F$ (cfr. 8.7), prende il nome di *processo* P nell'automa digitale $H(F,X_0)$. In modo analogo si può definire, sotto opportune condizioni, anche l'insieme

$$\dot{X} = X \cap \mathcal{G}, \tag{7}$$

output di $H(F,X_0)$.

La categoria $C(F,X_0)$ degli stati dell'automa digitale $H(F,X_0)$, come sopra definita, può essere interpretata come il *modello matematico degli stati di un sistema biologico digitale*, ossia di un sistema biologico che evolve nel tempo, per effetto di forze interne e stimoli esterni (cfr. 8.1 e 7.1, 7.2, 7.3). Le parole sull'alfabeto T (cfr. 8.1) sono lo schema matematico delle catene polipeptidiche e degli RNA messaggeri. La funzione F(X,Y) (cfr. (3), § 8) è lo schema matematico delle reazioni chimiche di adattamento degli stimoli. La categoria $C(F,X_0)$ (cfr. (4), § 8) è lo schema della totalità degli stati chimici, raggiungibili da parte di un sistema nervoso, che possieda un dato patrimonio comportamentale, il cui schema è l'insieme iniziale X_0 (cfr. 8.7). Ogni processo $X_1, X_2, ..., X_k$ in $H(F,X_0)$ (cfr. (5)) è uno schema matematico di un processo di *adattamento* del sistema nervoso agli stimoli esterni. L'insieme $\dot{X}$ (cfr. (7)) è uno schema matematico della risposta, che il sistema nervoso, nello stato X, dà ad uno stimolo Y.

10. Sempre in [21], § 9, l'oggetto

$$\Sigma = < H(F,X_0), \Omega >, \tag{8}$$

costituito da un automa digitale H (cfr. § 9) ed un *osservatore* Ω, prende il nome di *semiautoma,* espansione del concetto di neuromacchina. L'osservatore Ω, detto in MELZI [18] *osservatore interno*, è in grado di interagire con H. Se ad un dato tempo discreto (cfr. 9.3), l'automa digitale H è nello stato X (cfr. 9.1) e riceve lo stimolo Y (cfr. 9.2) dall'osservatore interno Ω, allora lo stato che H assume, nel tempo successivo, in virtù dello stimolo Y, è F(X,Y) (cfr. (3), § 8). L'introduzione della nozione di osservatore consente di ampliare le applicazioni degli schemi finora studiati. E' in tal senso, quindi, che in [18] si considerano un semiautoma (8) $\Sigma = < H(F,X_0), \Omega >$ e un altro osservatore ω, detto *osservatore esterno*, ed all'oggetto

$$\Sigma = (H, \Omega, \omega), \tag{9}$$

formato dall'automa H e dai due osservatori Ω, ω, si dà nuovamente il nome di *semiautoma*. Ciò consente anche alcune *semplificazioni* di *formalismi* e di *linguaggio,* illustrati in [18]. In ogni caso, il processo P (cfr. 9.4) in un semiautoma Σ (con opportune precisazioni, a secondo che esso sia dato nella forma (8), piuttosto che nella forma (9) cui ci si riferisce nel seguito) può essere illustrato, come indicato anche in MERCANTI [27], oltre che in [21] ed in [18], nel seguente modo.

10.1. Quando l'automa $H(F,X_0)$ assume lo stato X, l'osservatore esterno ω propone all'osservatore interno Ω di raggiungere un altro stato a partire da X, e così via.

10.2. Quando ω propone lo stato X a Ω, si dice che H è *non-equilibrato*.

10.3. Quando lo stato X è assunto dopo la scelta operata da Ω, si dice che H è *riequilibrato*.

10.4. Al processo P, nel quale H assume gli stati X_i (cfr. 9.1), sotto l'azione degli stimoli Y_i ($i = 1,2,...,k$) (cfr. 9.2), si associa il numero

$$\Sigma_i F(x_i, y_i), \tag{10}$$

con $x_i = | X_i |$ e $y_i = | Y_i |$, detto *traccia* di P, dove il segno di sommatoria Σ si riferisce alla ordinaria *somma* di *anello booleano*.

In sintesi il funzionamento del semiautoma Σ è dunque il seguente: *l'osservatore esterno* ω *squilibra* casualmente, in ogni tempo, l'automa H e *l'osservatore interno* Ω *riequilibra H,* in ogni tempo, in modo che, con l'*investimento energetico* (10) il processo P sia mantenuto nel complesso *equilibrato*, anche se la strategia di riequilibrazione, a disposizione di Ω ad ogni tempo, non è univocamente determinata, potendosi prevedere *ipotesi* di comportamento tra loro *alternative*.

La riequilibrazione di uno stato $\overline{X}$, da parte dell'osservatore interno Ω, è uno schema matematico della strategia chimica, che l'apparato nervoso segue, per rispondere ad uno stimolo di origine esterna o interna all'apparato stesso.

Si osservi ancora che l'automa $H(F,X_0)$ è *deterministico*, nel senso che la funzione (3) del § 8 $F(X,Y)$, che fa passare da uno stato X_j allo stato successivo X_{j+1} (cfr. (5),(6), § 9) in un processo P, nonché l'insieme di tutte le strategie di riequilibrazione di ogni stato $\overline{X}$ sono *noti e prefissati*. Ma la scelta, all'interno del suddetto insieme, di una strategia di riequilibrazione del dato stato $\overline{X}$, è affidata all'osservatore interno Ω ed è pertanto *indeterminata*. In tal senso è stato scelto il nome di semiautoma.

Attraverso il concetto di semiautoma, si ritrovano rapidamente i risultati già esposti nei §§ 5,6,7,8,9, come casi particolari di opportuni semiautomi.

11. In MERCANTI [27], il processo P tra ω ed Ω, descritto nel § 10, viene interpretato come uno *schema matematico dell'equilibrio fra gli stimoli esterni e la risposta proteica in un'area percettiva del sistema nervoso centrale*. In particolare la traccia (10) di 10.4,

$$\Sigma_i F(x_i,y_i),$$

può essere interpretata come energia dispersa nel processo P. Il meccanismo di nonequilibrio-riequilibrio, descritto nel § 10, può allora essere visto come un *modello concettuale della percezione sensoriale*. In particolare in [27] si tratta della percezione visiva. Ivi si considerano l'osservatore esterno ω come un modello della indeterminatezza degli stimoli, provenienti dalla realtà fisica, e l'osservatore interno Ω come un modello della corteccia visiva, che controlla l'ingresso percettivo. I meccanismi di equilibrio fra ω e Ω possono essere descritti con l'algebra $\mathcal{A}$ di [21] (cfr. 8.1), come è sommariamente detto anche in MELZI [17], dove si descrive una particolare illusione ottica, della quale, nel citato [27], si dà una interpretazione ed una giustificazione, come detto nel seguito, dei risultati che si ottengono sperimentalmente.

11.1. L'illusione ottica studiata in [27] è la seguente. Due sorgenti luminose, di uguali caratteristiche ottiche, emettono luce, alternativamente, per opportuni periodi di tempo, dell'ordine del secondo. La percezione che se ne ha, ad opportuna distanza dalle sorgenti, è quella di un'unica immagine, che oscilla con continuità dalla posizione di una sorgente alla posizione dell'altra, passando attraverso le posizioni

$$P_1, P_2, \dots, P_n.$$

dalle quali sembra provenire. Avvicinandosi alle due sorgenti, l'impressione di continuità aumenta, ma scompare quasi di colpo, quando la posizione dell'osservatore raggiunge un punto critico. Vi è, dunque, una sorta di *soglia*, che varia, di poco, da individuo ad individuo, o in particolari condizioni di osservazione.

11.2. L'interpretazione del fenomeno, in termini combinatori degli stati dell'area visiva della corteccia come un semiautoma, è la seguente. Siano

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

gli stati del semiautoma Σ (cfr. § 10), corrispondenti alla saturazione degli stimoli

$$S'_1, S'_2, \ldots, S'_n\,,$$

che al semiautoma Σ verrebbero forniti dalle immagini provenienti dai punti (cfr. 11.1)

$$P_1, P_2, \ldots, P_n.$$

In base a quanto detto nei precedenti paragrafi, ogni stato S_i $(i=1,2,\ldots,n)$ di Σ è un sottoinsieme dell'insieme $\mathcal{G}$ di tutte le parole sull'alfabeto T (cfr. § 8). Si può attribuire, a ciascun insieme S_i $(i=1,2,\ldots,n)$, un *peso* p, ossia si può definire una applicazione

$$\pi : P(\mathcal{G}) \to \mathcal{N}, \tag{11}$$

dell'insieme $P(\mathcal{G})$ delle parti dell'insieme $\mathcal{G}$ di tutte le parole sull'alfabeto T, definendo $\pi(p)$ come la cardinalità dell'insieme (discreto) $p \in P(\mathcal{G})$.

Nell'insieme $P(\mathcal{G})$ delle parti di $\mathcal{G}$, è inoltre facile definire una *distanza* $d(p,q)$ tra due parti p,q, dotata delle usuali proprietà

$$d(p,q) > 0, \text{ se } p \neq q\,, \qquad d(p,p) = 0\,, \qquad d(p,q) = d(q,p)$$

e della proprietà triangolare. Si dimostra facilmente che una tale funzione può essere il peso della somma $p \oplus q$ di anello booleano di p e q, ossia che (cfr. (11))

$$d(p,q) = \pi((p \oplus q).$$

Allora, per la proprietà triangolare, detto S_o lo stato iniziale (cfr. 9.1) del semiautoma Σ, per ogni $i=1,2,...,n-1$, si ha

$$d(P_i, P_{i+1}) < d(P_i, S_o) + d(S_0, P_{i+1}).$$

Invece l'essere

$$\sum_{1}^{n} {}_i\, d(P_i, P_{i+1}) \gtreqless d(P_1, S_o) + d(S_o, P_n), \tag{12}$$

dipende ovviamente dal numero dei lati della poligonale (astratta)

$$P_1, P_2, ..., P_n,$$

valendo certamente nella (12) il segno inferiore per $n=2$.

11.3. Nella (12) si scorge una suggestiva interpretazione dell'illusione ottica, dalla quale si è partiti (cfr. 11.1). Assimilando il peso di un insieme P_1 ($i=1,2,...,n$) di parole (cfr. 11.2), ossia la cardinalità di tale insieme, all'energia occorrente per sintetizzare tali parole, diventa evidente che la lunghezza di ogni singolo lato della poligonale $P_1, P_2, ..., P_n$ (cfr. 11.2) è tanto più piccola, tanto più due insiemi consecutivi hanno numerose parole in comune, a causa della ben nota definizione di somma di anello booleano. Quanto più piccolo è n (nella (12)), ossia quanto minore è la distanza angolare delle due sorgenti luminose, tanto più sarà soddisfatta la (12), con il segno inferiore. Più precisamente, esiste un intero n_0, da dirsi *soglia* per la (12), tale che per $n < n_0$ valga la (12), con il segno inferiore e, per $n \geq n_o$, valga la (12), con il segno superiore.

11.4. In termini di percezione visiva si può dire che, quanto più sono vicine le sorgenti luminose alternative, tanto più piccolo è il dispendio energetico della percezione a stadi intermedi. Il semiautoma Σ risparmia energia di saturazione, investendo piccoli incrementi di energia, *per percepire le sorgenti luminose inesistenti*

$$P'_2, P'_3, ..., P'_{n-1},$$

piuttosto che *per cancellare* le parole corrispondenti alla percezione di P'_n, e inversamente. La soglia n_0 corrisponde, da questo punto di vista, alla *soglia di convenienza energetica nel processo di saturazione percettiva degli stimoli*.

Ciò spiega, in maniera assai suggestiva, la scomparsa improvvisa dell'illusione ottica, al crescere dell'angolo apparente α fra le due sorgenti alternative (cfr. 11.1): la scomparsa avviene in corrispondenza al superamento della soglia n_0, ossia dell'angolo α corrispondente.

Invece la casuale scomparsa del fenomeno per qualche breve intervallo di tempo, ad angolo α costante, si spiega assai bene con l'esistenza di soglie energetiche, nel rifornimento energetico continuo di risorse metaboliche all'apparato visivo.

LA TEORIA DEI SISTEMI DIGITALI MULTICANALE

12. Il filo logico, che ha condotto successivamente alle varie generalizzazioni finora esaminate, trova il suo punto attuale di arrivo nel concetto di *Sistema Digitale Multicanale* (SDM). Risulta assai comodo scrivere un semiautoma Σ come SDM, sua naturale generalizzazione. Un *Sistema Digitale Multicanale* (SDM) è un sistema dinamico (cfr. § 0) per il quale lo stato iniziale, l'imput-output e lo stato istantaneo sono costituiti da informazione codificata, secondo le regole dell'algebra $\mathcal{A}$, sulle quali si basa il meccanismo algebrico-combinatorio illustrato nei §§ 8.9.10. Attraverso il linguaggio e la simbologia ivi studiata, un SDM può essere definito come un *vettore*

$$S = [C_0, C_1, \ldots, C_n]. \tag{13}$$

ad elementi in $P(\mathcal{G})$ (cfr. 8.1), e funzione di un tempo discreto t_i, con le seguenti clausole.

12.1. L'insieme

$$\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$$

delle componenti del vettore S è ripartito nell'elemento

$$C_0 \ (\textit{stato del sistema} \text{ al tempo } t_i),$$

negli elementi

$$C_1, C_2, \ldots, C_r \ (\textit{canali di entrata} \text{ al tempo } t_i)$$

e negli elementi

$$C_{r+1}, \ldots, C_n \ (\textit{canali di uscita} \text{ al tempo } t_i),$$

valendo l'ovvia relazione s+r=n, con r numero dei canali di entrata ed s numero dei canali di uscita.

12.2. Tra lo stato

$$C_0\ (t_i),$$

i canali di entrata

$$C_1\ (t_i),\ \ldots,\ C_r\ (t_i)$$

ed i canali di uscita

$$C_{r+1}\ (t_i),\ \ldots,\ C_n(t_i),$$

sussistono le *relazioni funzionali*

$$C_0\ (t_{i+1}) = F(C_0\ (t_i),\ C_1\ (t_i),\ \ldots,\ C_r\ (t_i)),\quad i = 1,2,\ldots \tag{14}$$

e

$$C_j\ (t_{i+1}) = F_j\ (C_0\ (t_i)),\quad j = r+1,\ r+2,\ldots,\ n. \tag{15}$$

Le relazioni funzionali (14), (15) esprimono, rispettivamente, come è d'uso nella teoria dei sistemi dinamici, che lo stato C_0 al tempo t_{i+1} è funzione dello stato C_0 e delle entrate C_1, C_2, ..., C_r al tempo precedente, e che le uscite $C_{r+1},\ldots,C_n$, al tempo t_{i+1}, sono funzioni dello stato C_0 al tempo precedente.

Le funzioni F e F_j sono funzioni da $P(\mathcal{G})$ a $P(\mathcal{G})$, indipendenti dal tempo (cfr. 8.5). La (14) e la (15) definiscono, evidentemente, una applicazione σ dell'insieme S dei vettori (13) in sé. Questa applicazione viene detta *funzione caratteristica*

$$F_{SDM} \tag{16}$$

dell'SDM. E' da notare, ovviamente, che parlando di funzioni si intende sempre riferirsi al concetto di $\mathcal{A}$-funzione (cfr. 8.5), nel senso che, tutti i legami fra insiemi di parole devono concepirsi come espressi mediante i predicati (cfr. 8.4) e le operazioni (cfr. 8.1) dell'algebra $\mathcal{A}$, definita in 8.1 e successivi.

Si consideri un vettore $S(t_i)$ funzione del tempo t_i (cfr. (13)). Se le componenti di $S(t_i)$ soddisfano un predicato, composto con uno o più predicati dell'algebra $\mathcal{A}$ (cfr. 8.1), si può dire che $S(t_i)$ *soddisfa* un $\mathcal{A}$-predicato $\mathcal{P}$. In tal caso, se $C_j(t_i)$, con j = 1,2,...,n (cfr. (13)), è il j-esimo canale di un SDM, si dirà che quel canale *gode del predicato*, ovvero *gode* *della proprietà $\mathcal{P}$,* al tempo t_i. Analogamente, è chiaro che cosa si debba intendere, dicendo che lo stato di un SDM gode di una data $\mathcal{A}$-proprietà al tempo t_i.

13. Caso particolare rilevante di SDM è quello di un SDM dotato di una sola entrata e di una sola uscita (MERCANTI [28]), per il quale prende senso la affermazione «*se l'entrata di un* SDM *gode di una proprietà $\mathcal{P}$ al tempo* t_i, *allora l'uscita gode di una proprietà $\mathcal{Q}$ al tempo* t_{i+1}». Detto $\triangle$ un SDM dotato di una sola entrata e di una sola uscita, sia P_i una proprietà, posseduta dall'entrata al tempo t_i e Q_j una proprietà, posseduta dall'uscita al tempo t_j. Se $t_j = t_{i+1}$, si può dire che Q_j è una $\triangle$-*conseguenza* di P_i, e si scrive

$$P_i \xrightarrow[\Delta]{} Q_{i+1}. \tag{17}$$

Si noti che, il fatto che valga la (17) dipende, in generale, dallo stato $C_0(t_i)$ di $\triangle$ (cfr. (15), § 12), per modo che la (17) può essere precisata con la

$$P_i \xrightarrow[\Delta, C_0(t_i)]{} Q_{i+1}. \tag{18}$$

Per un SDM $\triangle$, per il quale valgano le (17) e (18), si possono formulare, in generale, un *problema diretto* ed un *problema inverso*, nei seguenti termini.

13.1. *Problema diretto*. Per un determinato SDM $\triangle$ costruire la *categoria degli stati*, concependo gli stati come *oggetti* ed i predicati di canale come *morfismi* (cfr. 8.7).

13.2. *Problema inverso*. Costruire un SDM $\triangle$ tale che valga la (17) per ogni tempo t_i. Ciò significa caratterizzare lo stato $C_0(t_0)$ al tempo t_0 e la funzione caratteristica F_Δ di $\triangle$ (cfr. (16), § 12), in modo tale che valga la (14) del § 12, per ogni tempo t_i.

In generale, il problema diretto 13.1 ed il problema inverso 13.2 ammettono alcune suggestive interpretazioni. Lo stato $C_0(t_i)$, al tempo t_i, di un SDM, può essere pensato come un modello matematico dello stato di un micro o di un macrosistema economico. In tal caso, la scelta di una funzione caratteristica F_{SDM} (cfr. (16), § 12 e 13.2) equivale ad un'importante presa di posizione, sulla "bontà" di una data modellazione matematica di un sistema economico, mediante un SDM. I predicati di canale possono essere assunti come modelli matematici, delle più svariate proprietà economiche di un dato sistema economico. Si può pensare, ad esempio, al *comportamento degli operatori*, ai *vincoli di movimento del sistema*, alla *razionalità od alla* *irrazionalità del comportamento degli operatori*, ai più svariati *fenomeni a soglia*, dei quali si è già parlato al § 11 e si parlerà ancora al § 15.

Nel caso particolare di un SDM $\triangle$, dotato di una sola entrata e di una sola uscita, la (17) è la funzione caratteristica (16). Essa corrisponde alla modellazione matematica di un *sistema finanziario particolarmente semplice*: quello nel quale due soli operatori intrattengono rapporti di compravendita di titoli, contro liquidità monetaria, con regimi di scadenze e di interessi contrattati.

14. Un'interpretazione delle proprietà degli SDM, come modelli matematici delle proprietà di un sistema economico, si trova in ALLEVI [2], dove si illustra l'esistenza di SDM (ivi chiamati Sistemi dinamici digitali) in grado di descrivere alcuni processi economici, opportunamente schematizzati. Per la costruzione di un tale SDM, è necessaria una generalizzazione della definizione di SDM, che consenta di recuperare alcune proprietà dei sistemi, intesi nella loro più generale accezione, più precisamente le proprietà legate al fatto che un sistema scambia, con l'ambiente esterno, quantità misurabili. Tale generalizzazione, per certi versi simile a quella operata da CAROTTI [5], [4], relativamente al passaggio da neuromacchina digitale a neuromacchina continua (cfr. § 5), è illustrata in ALLEVI [1] dove, in sintesi, al concetto di insieme di parole su un dato alfabeto (cfr. 8.1), si sostituisce il concetto di folla di parole, cioè di insiemi nei quali le parole risiedono in un certo numero arbitrario di copie di una stessa parola, ed all'algebra $\mathcal{A}$ del § 8, si sostituisce un'algebra, gli elementi della quale sono folle di parole. Il processo economico, preso in considerazione in [2], per la descrizione tramite SDM, è un caso particolare, opportunamente schematizzato e semplificato, del classico *modello* di SRAFFA [40] di produzione di *merci a mezzo di merci*, nel caso della *produzione* per *sussistenza*. In esso si ipotizza un mercato nel quale operino tre soli produttori, rispettivamente, di grano, ferro e porci (in [2], *tacchini*), ognuno dei quali, al termine del ciclo annuale di produzione, scambia con gli altri due una parte del proprio prodotto, in modo da poter ricostituire le scorte necessarie a ripetere il ciclo annuale. Vengono assegnati, il vettore [S,E,U], nel quale S, E ed U indicano, rispettivamente, lo stato, i canali di entrata ed i canali di uscita ad un dato tempo (cfr. 12.1) e la funzione caratteristica F_{SDM} (cfr. (16), § 12), dell'SDM *isomorfo* (in un senso precisato) al modello di Sraffa preso in considerazione.

PROBLEMI APERTI

15. Dopo aver presentato l'iter che ha condotto, attraverso varie generalizzazioni, dal concetto di *neuromacchina* a quello di *Sistema Digitale Multicanale*, si vuole concludere questo lavoro con una breve panoramica delle prospettive più interessanti, apertesi attraverso gli schemi studiati. Ci si riferisce soprattutto alle *applicazioni* ed alle *interpretazioni* relative ai sistemi biologici ed economici, con particolare attenzione ai già citati fenomeni a soglia.

15.1. Oltre che dal punto di vista algebrico-combinatorio, un SDM può essere interpretato anche *analiticamente* e *topologicamente* (MELZI [19]).

15.1.1. Un insieme finito o infinito di parole su un alfabeto (cfr. 8.1) può essere rappresentato con *coordinate reali*, apparendo, di conseguenza, come un *punto* in uno *spazio* dotato in generale di un numero *finito*, o *infinito misurabile*, di coordinate. Il movimento di un SDM (variazione dei suoi stati, cfr. § 12) è una *traiettoria* in uno *spazio*, in generale *pre-hilbertiano*. In questa interpretazione geometrica, le proprietà di continuità o di discontinuità (e, quindi, il concetto di soglia) assumono un particolare senso intuitivo.

15.1.2. La transizione, da uno stato all'altro, di un SDM è descrivibile in termini algebrico-combinatori (cfr. § 12) e, quindi, le proprietà delle folle di parole ([1]) in gioco possono essere descritte e, misurate, in termini *topologici e matriciali*, in *spazi funzionali* opportuni.

15.2. Una significativa applicazione di tipo naturalistico è stata segnalata nel § 11. Altre applicazioni di tipo economico sono suggerite nel § 13. Per quanto detto a proposito dei fenomeni a soglia, gli SDM sembrano particolarmente adatti allo studio di sistemi biologici e di sistemi economici, tra i quali sembrano sussistere precise analogie. Per esempio, nel caso del fenomeno biologico della percezione (cfr. § 11), si ammetta che il fenomeno stesso consista nella *saturazione di un segnale*, per mezzo di *risorse energetiche* limitate. Se si osserva che ogni processo economico si lascia descrivere, a prescindere da tutti i possibili ed inevitabili disturbi osservazionali, per mezzo di *strategie ottimali di investimento* di risorse limitate, l'analogia enunciata diventa ovvia.

15.3. Le *interpretazioni economiche* di un SDM riguardano il fatto che gli stati dei suoi vari canali, e lo stato istantaneo dell' SDM (cfr. 12.1), possano essere visti come un modello matematico dei vettori di grandezza, fluenti in un sistema economico. Allora i fenomeni a soglia, che nei sistemi biologici sono considerati come soglie *percettive*, possono essere riguardati come i ben noti fenomeni di *isteresi economica* e possono essere interpretati in termini algebrico-combinatorio.

15.4. *Esempi delle proprietà degli SDM, applicati allo studio di sistemi economici,* vengono forniti di seguito in 15.4.1, 15.4.2, 15.4.3, 15.4.4, 15.4.5 e 15.4.6.

15.4.1. SDM *a due canali* (cfr. § 13), *simulanti una situazione microeconomica assai semplice*. Un unico bene B ha un prezzo $p(t_i)$, *funzione casuale* del tempo discreto t_i ($i = 0,1,....,n,...$). Un operatore Ω, che possiede la quantità q_0 di B al tempo t_0, stabilisce *due soglie* per la variabile $p(t_i)$: una soglia *minima* S' ed una soglia *massima* S" (con S' < S").
Allorché il prezzo di B scende (al tempo t_i) al di sotto di S', l'operatore Ω compera una quantità Δq_i di B al prezzo $p(t_i)$ e, quando il prezzo $p(t_j)$ sale al di sopra di S", l'operatore Ω vende la quantità Δq_j di B. Non si escludono *comportamenti irrazionali* di B, espressi da *errori di segno* negli incrementi Δq_i , Δq_j.

15.4.2. *SDM a due canali di entrata e due di uscita, simulanti due soli operatori*. Questi intrattengono rapporti di compravendita di titoli contro liquidità monetaria, con regimi di scadenza e di interessi contrattati. Occorreranno alcune condizioni sufficienti di stabilità asintotica, attualmente allo studio.

15.4.3. Il caso dell'SDM illustrato in 15.4.2 può essere opportunamente adattato al caso del *duopolio*, al caso, cioè, di due e due soli operatori, che vendano lo stesso prodotto sul mercato.

15.4.4. Il problema della costruzione di un SDM, come quelli ipotizzati in 15.4.2 e 15.4.3, è generalizzabile, ricorsivamente, in modo da poter descrivere un SDM a n canali, modello di un *mercato finanziario* ad n operatori, trattanti k specie di titoli fra loro intercambiabili, con dati tassi di scambio.

15.4.5. Un altro tipico esempio di SDM è quello di un modello matematico di una *borsa merci*, simulante il meccanismo di *bombardamento* di stimoli esterni, ai quali il sistema reagisca con un *controbombardamento* di risposte.

15.4.6. In generale, si può studiare l'esistenza di SDM soddisfacenti ad un'ampia classe di predicati di processi, applicabili al *problema del portafoglio*.

15.5. *Esempi delle proprietà degli SDM, applicati allo studio di sistemi biologici*, vengono forniti di seguito in 15.5.1, 15.5.2, 15.5.3 e 15.5.4.

15.5.1. *SDM simulanti processi inferenziali reali*. Sarà necessario stabilire una corrispondenza biunivoca, tra gli stati (di canale ed iniziale) (cfr. § 12) di un SDM, e gli insiemi di *costanti logiche, di variabili logiche, di parametri predicativi, ecc.*, in modo che il movimento dell'SDM simuli i processi *deduttivi reali*, prima quelli *formalizzati*, poi quelli *naturali*.

15.5.2. *SDM simulanti sistemi nervosi reali*. Si tratta di studiare i processi nervosi, così come vengono direttamente osservati in neurofisiologia.

15.5.3. Nel senso di quanto detto in 15.5.2. e analogamente a quanto fatto per la percezione visiva nel § 11, un SDM sembra adattarsi allo studio di un modello matematico della percezione acustica e, in particolare, delle tecniche compositive derivate, delle quali si fa un rapido cenno in 15.5.4.

15.5.4. In MELZI-OZZOLA [23] si assegna un *modello matematico* del fenomeno dell'*ascolto del messaggio musicale*. Indipendentemente dalle tecniche compositive, il *riconoscimento* dei *sintagmi musicali* è visto come *strategia di saturazione* di un *segnale acustico*. Questo concetto potrà essere riformulato, attraverso un opportuno SDM, descrivendo in termini algebrico-combinatori le strategie di riconoscimento del tema, della ripetizione, delle variazioni e delle sequenze della melodia, mediante l'evoluzione degli stati di canale e dello stato iniziale dell'SDM stesso. Attraverso tale movimento dell'SDM, potrà essere descritta la struttura della musica ascoltata, giungendo ad una formalizzazione *del linguaggio musicale*, mediante la «*modellazione matematica del comportamento computazionale della corteccia acustica*» (MELZI [18]).

15.6. Altre prospettive di interpretazione e di applicazione del concetto di SDM sono le seguenti.

15.6.1. *Studio di SDM capaci di prestazioni assegnate*. Si tratta di descrivere prestazioni di *intelligenza artificiale*, in termini di comportamento, cioè con funzioni dalla grammatica $\mathcal{G}$ (cfr. 8.1) a $\mathcal{G}$ stessa (cfr. funzione caratteristica di un SDM, (16), § 12), e poi di costruire qualche SDM, capace dei comportamenti richiesti, connessi con i *linguaggi*, dapprima quelli *artificiali*, poi quelli *naturali*, opportunamente schematizzati. In questo senso può essere visto anche il linguaggio musicale di 15.5.4.

15.6.2. *Studio di SDM simulanti automi speciali*. Si tratta di indagare sulla flessibilità degli SDM nelle imitazioni di automi ed *algoritmi* di ogni genere.

15.7. *Applicazione dei concetti fondamentali della teoria dell'informazione agli SDM*. In tal senso è allo studio un lavoro, nel quale si introducono i concetti di *entropia* e di *ridondanza,* nei rapporti tra energia e informazione codificata in un SDM.

Infine, sembra di poter dire che un SDM possa, vantaggiosamente, essere utilizzato nello studio di un qualunque *sistema* che, *sottoposto a stimoli, reagisca* fornendo una *risposta*, in particolare se la *risposta* è legata a fenomeni a *soglia* e ad informazione codificata.

CONCLUSIONI

16. Nelle sezioni precedenti di questo lavoro, si è passati, attraverso successive assiomatizzazioni e generalizzazioni, dal concetto di *neuro-macchina* a quello di *semiautoma,* per giungere infine a quello di Sistema Digitale Multicanale, le potenzialità di applicazione del quale appaiono ancora inesplorate. In queste conclusioni si discutono brevemente i criteri di scelta della ricerca, confrontandoli succintamente con quelli di altri studi sull'argomento.

In tal senso, si osserva che la via di ricerca indicata in questo lavoro si basa su un metodo *astratto,* che utilizza *assiomi* e *definizioni,* per costruire *modelli matematici,* che rispondano, contemporaneamente, all'esigenza di essere concepiti sia come schemi dei *processi mentali,* opportunamente semplificati, sia come schemi attendibili delle *strutture nervose*.

Va rilevato, comunque, che le vie di ricerca più seguite fino ad ora sono quelle legate, principalmente, alla *neurofisiologia* ed alla *cibernetica.* Nei paragrafi successivi si ricordano rapidamente alcuni di questi tipi di ricerca, evidenziandone taluni non trascurabili limiti di principio.

17. La neurofisiologia si prefigge di risalire, con opportune estrapolazioni, dai fenomeni osservabili, attraverso lo studio diretto e la sperimentazione del comportamento del sistema nervoso, alle radici materiali dei fenomeni mentali (vedere per esempio KATZ [9], LEVI MONTALCINI-ANGE-LETTI-MORUZZI [10]).

Anche se la neurofisiologia può sembrare la scienza più adatta, a fornire una completa analisi dei rapporti tra fenomeni fisici nervosi e inferenza formale, tuttavia essa non riesce ad osservare, globalmente, il fenomeno dell'inferenza, separata dai fenomeni che la rendono materialmente possibile, ma ne disturbano la lettura diretta.

18. La cibernetica indaga sulle *reti nervose*, principalmente, come esposto successivamente.

18.1. Una *descrizione assiomatica* di *cellula nervosa*, dovuta a Mc CULLOCH-PITTS [11], consiste nella schematizzazione di un tipo di *neurone*, detto *logoneurone*, inteso come un'unità elaboratrice di informazione, gli *inputs* e *outputs* della quale rappresentano, rispettivamente, schemi di bottoni *sinaptici* e di *assoni* della cellula nervosa reale. Collegando, arbitrariamente, gli inputs e gli outputs di più logoneuroni, si ottiene una *rete di logoneuroni* (schema di rete nervosa reale). Kleene nel 1956 (MINSKY [32]) ha dimostrato l'equivalenza fra le reti di logoneuroni e gli *automi*, mentre sono ben note le ricerche di von NEUMANN [33], per la costruzione di un automa capace, con significativa finzione matematica, della proprietà essenziale degli esseri viventi, di *autoriprodursi*.

L'impostazione *circuitistica* di McCulloch e Pitts, se ha consentito i primi progressi nello studio matematico delle reti nervose, ha anche impoverito di molto, attraverso la schematizzazione del logoneurone, il patrimonio di conoscenza dei fenomeni biochimici, che avvengono all'interno di ogni singola cellula reale.

18.2. Nella *termodinamica dissipativa* (PRIGOGINE [37]), si introduce il concetto di *pseudoentropia nulla*, che caratterizza il passaggio dal *caos cibernetico* all'*ordine*.

La termodinamica dissipativa non appare adeguata a fornire schemi di totale corrispondenza, tra i singoli accadimenti nervosi entro la corteccia cerebrale ed i singoli momenti di un processo deduttivo.

18.3. L'*intelligenza artificiale* (vedere ad esempio COLLINS-DALE-MELTZER-MICHIE [7]), può essere riguardata come una *tecnica matematica* per conseguire *automaticamente* prestazioni, che simulino un *comportamento intelligente*.

Con l'intelligenza artificiale, si simulano solamente le prestazioni del sistema nervoso mediante schemi, propri della logica matematica, che non hanno a che vedere con il sistema nervoso reale.

18.4. Vale appena la pena di ricordare che anche la *psicologia sperimentale* studia i fenomeni mentali, partendo dal comportamento globale dell'individuo in singole situazioni contingenti (vedere ad esempio OSGOOD [34]).

La psicologia sperimentale, peraltro, non tocca il problema del rapporto con la *materia vivente*.

19. Una particolare attenzione viene dedicata, in questo paragrafo, alle *reti neuronali*[10], che sono gli elementi più noti di una più ampia classe di modelli, i cosiddetti *modelli connessionisti*. Le reti neuronali si ispirano, per certi versi, alla struttura del sistema nervoso; le loro capacità computazionali, come nel sistema nervoso, dipendono da un vastissimo numero di elementi molto semplici, i neuroni, le elaborazioni dei quali avvengono in parallelo.

19.1. Le reti neuronali sono caratterizzate, sia dal punto di vista concettuale, sia da quello operativo, dalla cosiddetta capacità di imparare da esempi (*training set*) e di organizzare le proprie *categorie interpretative*. Esse, da un punto di vista matematico, possono essere viste come sistemi dinamici (*non lineari*) a più gradi di libertà, capaci di autoorganizzarsi, se sottoposte ad appropriati algoritmi.

19.2 Alcune applicazioni caratteristiche delle reti neuronali sono le *low level analysis* (riconoscimento di pattern, memorie associative, analisi dei segnali, riconoscimento di forme, controllo del movimento, robotica, ottimizzazione combinatoria, e così via).

19.3. In sintesi, nelle reti neuronali l'apprendimento avviene, generalmente, variando i cosiddetti *pesi* delle connessioni, mentre le *funzioni di trasferimento* dei nodi sono fisse e inducono una partizione lineare dello spazio. Le connessioni e i nodi sono i corrispondenti, rispettivamente, degli assoni e dei neuroni del sistema nervoso reale.

19.4. Quanto detto in 19.3, sembra limitare in maniera incontrovertibile le capacità elaborative di una rete neuronale, rendendo necessaria una elevata complessità operativa, anche nel caso di elaborazioni assai semplici, rendendo inoltre difficoltoso lo sviluppo di processi di apprendimento efficaci e rapidamente convergenti. Inoltre, il procedimento di riconfigurazione della rete neuronale appare lungo e costoso. Sembrerebbe inoltre che, in ogni caso, il modello proposto dalle reti neuronali sia abbastanza diverso dal cervello umano, quanto lo è il calcolatore di von Neumann.[11]

---

[10] I concetti di fondo, che regolano le reti neuronali, furono enunciati nel 1943 (*neuro-logical networks*) dai già citati McCulloch e Pitts e ripresi nei primi anni sessanta da Rosenblatt e Gamba con i loro *perceptrons*.

[11] L'interesse per il cosiddetto *Neural Computing*, dagli inizi nel 1943, con gli studi di McCulloch, Pitts, Wiener, Craik, si è stabilizzato nel ventennio 1950-1970, con gli studi di Shannon, von Neumann, Ashby, Hebb, Turing, Rosenblatt, Minsky, Papert, Widrow, Hoff, Arbib, Kohonen, diminuendo fino a circa il 1984 e riprendendo con notevole successo, grazie ai lavori del PdP Group, di Hopfield ed altri, fino ad oggi.

20. Gli SDM sono progettati in modo tale che la loro struttura si ispiri, il più verosimilmente possibile, al sistema nervoso degli esseri viventi. Si tratta, dunque, di modelli computazionali, che elaborano ed immagazzinano informazione alla stregua dei sistemi biologici e, in particolare, del cervello umano. In tal senso quindi gli SDM sono di tipo complementare, piuttosto che di tipo alternativo, rispetto alle reti neuronali, all'intelligenza artificiale classica ed ai metodi matematici tradizionali. I risultati più interessanti e significativi possono essere ottenuti, sembra di poter dire, da una sinergia tra i diversi approcci ad applicazioni anche complesse, particolarmente nel campo biologico ed in quello economico.

BIBLIOGRAFIA

1. E. ALLEVI, *Preliminari algebrici e topologici allo studio dei sistemi digitali*, Rend. Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 124 (1990), 173-187.
2. E. ALLEVI, *Una interpretazione sistemica non convenzionale di alcune questioni di economia*, Rend. Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 126 (1992), 69-81.
3. L. VON BERTALAMFFY, *Teoria generale dei sistemi*, ISEDI, Milano, 1971.
4. A. CAROTTI, *Neuromacchine come sistemi continui e loro dinamica*, Ist. mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 8 (1980), 43-59.
5. A. CAROTTI, *Continuous Neuromachines as Dynamic Systems*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 6 (1981), 34-59.
6. A. CAROTTI e F. MERCANTI, *Risultati sperimentali della simulazione di neuromacchine sul computer*, Ist. Mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 5 (1981), 3-13.
7 M.L. COLLINS, E. DALE, B. MELTZER e D. MICHIE, *Machine Intelligence*, Amer. Elsevier, New York, 1967-1969.
8. B. ISONNI, *Neuromacchine sequenziali*, Rcud. Sem. Mat. di Brescia, 5 (1981), 97-102.
9. B. KATZ, *Nervi muscoli e sinapsi*, Zanichelli, Bologna, 1971.
10 R. LEVI MONTALCINI, P. ANGELETTI e P. MORUZZI, *Il messaggio nervoso*, Rizzoli, Milano, 1975.
11. W. MAC CULLOCH e W. PITTS, *A logical Calculus of the Ideas immanent in nervous Activity*, Bull. of Mathematical Biophysics, 5 (1943), 112-147.
12. S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York Heildelberg Berlin, 1971.
13. G. MELZI, *I supporti fisici dell'inferenza formale*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 1(1976), 1-243.
14. G. MELZI, *Il problema fondamentale dei neuromodelli*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 2 (1977), 55-93.

15. G. MELZI, *Logica formale e attività nervosa superiore*, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, 46 (1976), 43-71.
16. G. MELZI, *Una definizione assiomatica del concetto di neuromacchina*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 5 (1981), 9-74.
17. G. MELZI, *Optical Illusions as an Example of Fuzzy perception*, TÜV, Verlag, Rheinland (1986), 231-248.
18. G. MELZI, *Sulla definizione di semiautoma*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 10 (1988), 23-50.
19. G. MELZI, *Sistemi dinamici digitali e loro possibili applicazioni*, Ratio Math., 2 (1991), 157-160.
20. G. MELZI e F. MERCANTI, *Per una assiomatica dell'apparato nervoso*, Ist. Mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 8 (1980), 3-29.
21. G. MELZI e F. MERCANTI, *An algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 9 (1988), 107-121.
22. G. MELZI e F. MERCANTI, *Teoria dei sistemi e Sistemi Digitali Multicanale*, Sinopie, Politecnico di Milano, 2 (1989), 34-35.
23. G. MELZI e V. OZZOLA, *A neural Theory of Music and Derived Techniques of Composition*, Proceedings of 1982 International Computer Music Conference, Computer Music Association, San Francisco, California.
24. F. MERCANTI, *On a Neuromachine equivalent to the universal Turing Machine*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 6 (1981), 9-14.
25. F. MERCANTI, *Reti nervose e computabilità*, Ist. Mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 8 (1980), 31-42.
26. F. MERCANTI, *Contributi per una teoria matematica dei fenomeni mentali*, Per. di mat., Vol. 57, 1-2 (1981), 3-14.
27. F. MERCANTI, *Una suggestiva analogia fra fenomeni biologici e fenomeni economici a soglia*, Ratio Math., 2 (1991), 161-165.
28. F. MERCANTI, *Interpretazione economica dei predicati di canale in un Sistema Digitale Multicanale*, Ratio Math., 3 (1992), 81-84.
29. F. MERCANTI, *La descrizione matematica dei fenomeni a soglia*, Per. di mat., Vol. 69, 2 (1993), 56-60.
30. F. MERCANTI e F. PIAZZESE, *Neuromachines as Turing Machines*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 5 (1981), 103-114.
31. F. MERCANTI e F. PIAZZESE, *Canonical Forms of Data Processing Systems*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 6 (1981), 15-33.
32. M.L. MINSKY, *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice-Hall Inc., New York, 1967.
33. J. VON NEUMANN, *Theory of self-reproducing Automata*, Edited and completed by W. Burks, Urbana and London, 1966.
34. C.E. OSGOOD, *Method and Theory in Experimental Psychology*, Oxford University, New York, 1953.
35. C. PERELLI CIPPO e E. VENINI, *A neuro-model of the propositional calculus*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 3 (1979), 102-118.

36. F. PIAZZESE, *Neuromacchine e teoria generale dei sistemi*, Per. di mat., Vol. 57, 1-2 (1981), 15-18.
37. J. PRIGOGINE, *Time, Irreversibility and Structure. The Physicist's Conception of Nature*, J. Mehra (ed.), 1973.
38. G. RESCONI, *Una osservazione sui processi tendenti all'entropia nulla*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 2 (1977), 47-54.
39. S. RINALDI, *Teoria dei sistemi*, Clup Polit. di Milano, 1977.
40. P. SRAFFA, *Produzione di merci a mezzo di merci*, Einaudi ed., 1960.