Ratio Math. n. 7 - 1994
39 - 55

DALLA COERENZA ALLA FORMULA DI BAYES: UN PERCORSO TEORICO FONDAMENTALE PER LE APPLICAZIONI

Giuseppe Di Biase
Università "G. D'Annunzio" - Facoltà di Farmacia
Palazzo de Pasquale, Via Vicoli - 66100 Chieti

Sommario. Dopo aver illustrato il concetto di coerenza, essenziale per rendere operativa in modo corretto la definizione di probabilità come grado di fiducia, viene mostrato come da esso discendono i due teoremi fondamentali del Calcolo delle probabilità: probabilità totali e composte. Si perviene, quindi, alla formula di Bayes ottenuta come rilettura del secondo dei teoremi citati. Infine due esempi significativi, uno di natura applicativa, che coinvolge anche l'uso di una procedura automatica recentemente sviluppata da Di Biase in [5] per verificare la coerenza di assegnamenti di probabilità condizionate, e l'altro di natura didattica, ne consentono la comprensione per un uso appropriato.

1. INTRODUZIONE

La probabilità di un evento E è la misura del grado di fiducia che un individuo ha sul verificarsi di E. La sua valutazione dipende dallo stato di informazione dell'individuo e può, quindi, essere giudicata diversamente da un altro individuo. Inoltre, uno stesso individuo può cambiare la propria opinione in seguito all'acquisizione di nuove informazioni.

Ad esempio oggi un tifoso (piuttosto ottimista) può valutare uguale a 0.8 la probabilità che il Pescara rimanga in serie B, un altro, con argomentazioni altrettanto valide, potrebbe valutarla uguale a 0.1. È ragionevole pensare che il primo, se venisse a conoscenza del fatto che i dirigenti sono in completo disaccordo sui premi salvezza, diminuirebbe il suo grado di fiducia e che il secondo, se venisse a sapere che la squadra ha acquistato un bravo giocatore, lo aumenterebbe. Per rendere operativa questa definizione di probabilità esistono vari criteri (cfr. ad es. de Finetti in [3], Scozzafava in [10] e Gilio in [7]). Brevemente qui si illustra quello della *scommessa coerente*.

La probabilità di un evento E è l'importo p che un individuo è disposto a pagare, effettuando una *ipotetica* scommessa, per ricevere 1 se E si verifica oppure 0 se E non si verifica (perdendo quindi l'importo p). È ragionevole pensare che la scommessa è "corretta" se l'individuo è disposto, oltre che ad effettuarla, anche a riceverla, ovvero a ricevere p con l'impegno di pagare 1 se E si verifica oppure 0 se E non si verifica (guadagnando l'importo p).

Una scommessa in cui sia stata introdotta la clausola di scambiabilità delle parti è detta coerente.

Alterando i fattori di scala si può parlare di quota di scommessa coerente pS (S arbitrario, eventualmente negativo in caso di ricezione della scommessa) per ricevere (pagare) S se E si verifica e niente in caso contrario.

Affinché la scommessa avvenga in maniera coerente occorre che l'importo p sia "giusto" e quindi che la probabilità di E, indicata anche con p(E), sia "corretta". Ciò avviene se $p = p(\mathrm{E})$ è tale che nessuno dei due scommettitori può effettuare scommesse che gli diano *a priori* una vincita od una perdita certe, a prescindere dall'esito di E.

Nel caso di scommessa su un solo evento ciò comporta che p non può essere negativo, né maggiore di 1, cioè che $p \in [0,1]$.

Per realizzare tecnicamente una scommessa o una combinazione di scommesse coerenti vi sono varie maniere (cfr. ad es. de Finetti in [3], Scozzafava in [9] e [10], Maturo in [8]). Si illustra di seguito quella dovuta a quest'ultimo autore.

2. REALIZZAZIONE DI UNA COMBINAZIONE DI SCOMMESSE COERENTI

Se un individuo A vuole scommettere con un individuo B su n eventi qualsiasi $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n$ delle somme $p_1S_1, p_2S_2, \dots, p_nS_n$ in maniera che $p_1, p_2, \dots, p_n$ siano probabilità coerenti degli eventi $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n$, la scommessa deve avvenire con le seguenti regole.

Per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

(R1) A sceglie le p_i, $p_i \in [0,1]$

(R2) B sceglie le S_i, (in particolare il segno).

La scelta del segno delle S_i, implica la scelta di chi tra i due individui fa da banco o da scommettitore.

In sostanza A deve scegliere "bene" le $p_i = p(E_i)$ in maniera che B non possa fissare le S_i in modo da avere un guadagno sicuro.

Il guadagno aleatorio relativo ad una scommessa su un evento E è univocamente definito dalla formula:

$$G_E = (|E| - p)S$$

ove |E| è l'indicatore dell'evento E così definito:

$$|E| = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad E \quad \text{si verifica} \\ 0 & \text{se} \quad E \quad \text{non si verifica} \end{cases}$$

Il guadagno relativo ad una scommessa su un evento E è aleatorio in quanto il suo valore non è noto per carenza di informazione su E. Per l'individuo che effettua la scommessa sarà $G_E = S - pS$ in caso di vincita (E si è verificato) oppure $G_E = - pS$ in caso di perdita (E non si è verificato).

Per realizzare una scommessa coerente è necessario che i due possibili valori del guadagno non siano dello stesso segno.

Nel caso di una combinazione di scommesse su n eventi il guadagno aleatorio assume la forma:

$$G_{E_1,\ldots,E_n} = (|E_1| - p_1)S_1 + (|E_2| - p_2)S_2 + \ldots + (|E_n| - p_n)S_n .$$

I due individui A e B realizzeranno una combinazione di scommesse che è coerente se avranno fissato rispettivamente le p_i e le S_i in modo da non avere *a priori*, cioè prima di vedere quali degli eventi E_i si siano verificati, un guadagno (perdita o vincita) che sia certo.

Dalla condizione di coerenza discendono in modo naturale, come vedremo nei prossimi paragrafi, il Teorema delle probabilità totali:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) \tag{2.1}$$

e quello delle probabilità composte:

$$(2.2) \qquad p(A \cap B) = p(A)\, p(B/A).$$

Si può dimostrare inoltre, vedi ad esempio Bruno e Gilio in [1], che la coerenza è condizione anche sufficiente, oltre che necessaria, per la validità delle (2.1) e (2.2).

3. TEOREMI DELLE PROBABILITÀ TOTALI E COMPOSTE

Supponiamo di fare una scommessa coerente simultanea su due eventi incompatibili E_1 ed E_2, ovvero una combinazione di scommesse su E_1 ed E_2 con importi rispettivi p_1 e p_2 in modo che tali valori siano valutazioni di probabilità coerenti per gli eventi incompatibili E_1 ed E_2.

Il guadagno aleatorio relativo a tale scommessa è:

$$(3.1) \quad G_{E_1,E_2} = (|E_1| - p_1)\,1 + (|E_2| - p_2)\,1 = \begin{cases} 1 - (p_1 + p_2) & \text{se si vince} \\ -(p_1 + p_2) & \text{se si perde} \end{cases}$$

Se, invece, facciamo una scommessa coerente sull'evento E che risulti essere proprio la somma logica di E_1 e E_2, di importo $p = p(E)$, il guadagno assume la forma:

$$(3.2) \qquad G_E = (|E| - p)\,1 = \begin{cases} 1 - p & \text{se si vince} \\ -p & \text{se si perde} \end{cases}$$

Essendo E_1 e E_2 incompatibili in realtà la prima scommessa equivale alla seconda. Infatti, poiché $E = E_1 \cup E_2$ vinceremo la scommessa su E se si verifica E_1 oppure se si verifica E_2 e la perderemo se non si verifica nè E_1 nè E_2. D'altra parte vinceremo la prima scommessa se si verifica E_1 oppure se si verifica E_2, guadagnando in entrambi i casi la somma $1 - (p_1 + p_2)$, la perderemo se non si verificano nè E_1 nè E_2. Pertanto i guadagni aleatori relativi alle due scommesse debbono essere uguali e dalle (3.1) e (3.2) segue:

$$p = p_1 + p_2$$

ovvero la (2.1).

La conclusione si può trarre ancora più semplicemente considerando che se E_1 ed E_2 sono incompatibili, l'indicatore dell'evento $E = E_1 \cup E_2$ gode della proprietà:

$$|E| = |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$$

e quindi essendo:

$$G_E = (|E| - p) = |E_1| + |E_2| - p\,, \qquad G_{E_1,E_2} = |E_1| + |E_2| - (p_1 + p_2),$$

si ha:

$$G_E = G_{E_1,E_2} \Rightarrow p = p_1 + p_2\,.$$

Si dice probabilità condizionata p(E/H) di un evento E subordinato all'evento H l'importo p che un individuo è disposto a scommettere coerentemente per ricevere:

1 se E si verifica, una volta che si sia verificato anche H;

0 se E non si verifica, una volta che si sia verificato H;

p se H non si verifica (in questo caso cioè si tratta di una finta scommessa in quanto p viene restituito).

Naturalmente se si vuol vincere una somma S bisogna fissare come quota della scommessa l'importo pS.

Per dimostrare il teorema delle probabilità composte supponiamo dapprima di effettuare una scommessa coerente sull'evento H con l'obiettivo di vincere la somma S nel caso in cui quest'evento si verifichi. La relativa quota è pS con $p = p(\mathrm{H})$ ed il guadagno aleatorio è dato da:

$$G_H = (|H| - p)S = \begin{cases} S - pS & \text{se H si verifica} \\ -pS & \text{se H non si verifica} \end{cases}$$

Successivamente supponiamo di fare un'altra scommessa coerente sull'evento subordinato E / H di quota $p_1 = p(\mathrm{E} / \mathrm{H})$ per vincere la somma unitaria. Il relativo guadagno aleatorio è:

$$G_{E/H} = |H| \; (|E| - p_1) = \begin{cases} 1 - p_1 & \text{se si verificano H ed E} \\ -p_1 & \text{se si verificano H ed } \overline{\text{E}} \\ 0 & \text{se H non si verifica} \end{cases}$$

Ipotizzando che siamo noi a scommettere, S è positivo.

Supponiamo ora di fare simultaneamente tutte e due le scommesse precedenti, il guadagno aleatorio è dato dalla somma dei guadagni relativi alle singole scommesse:

$$G_{H,\,E/H} = G_H + G_{E/H} = (|H| - p)S + |H|\,(|E| - p_1) =$$
$$= |H|\,S - pS + |H|\,|E| - |H|\,p_1.$$

Essendo S arbitrario, ma positivo, lo possiamo porre uguale proprio a p_1, ottenendo:

$$G_{H,\,E/H} = |H|\,|E| - pp_1 = |H|\,|E| - p(H)\,p(E/H).$$

Osserviamo che

$$|H|\;|E| = \begin{cases} 1 & \text{se H ed E si verificano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui $|H|\,|E| = |H \cap E|$. Il guadagno aleatorio relativo alle due scommesse coerenti su H e su E / H si può, quindi, scrivere nella seguente maniera:

$$G_{H,\,E/H} = |H \cap E| - p\,(H)\,p\,(E / H) = \begin{cases} 1 - p\,(H)\,p\,(E / H) & \text{se } H \cap E \text{ è vero} \\ - p\,(H)\,p\,(E / H) & \text{se } H \cap E \text{ è falso} \end{cases}$$

Tale espressione rappresenta il guadagno relativo ad una scommessa coerente sull'evento $H \cap E$ se e solo se $p(H)\,p(E / H)$ è proprio la probabilità dell'evento $H \cap E$. Pertanto deve risultare:

$$p(H \cap E) = p(H)\, p(E / H) \tag{3.3}$$

che esprime il teorema delle probabilità composte.

Ovviamente, scambiando il ruolo di E ed H, la (3.3) si può anche scrivere:

$$p(E \cap H) = p(E)\, p(H / E). \tag{3.4}$$

Osserviamo che i costituenti associati all'evento condizionato E/H sono $C_1 = E \cap H$, $C_2 = \overline{E} \cap H$, $C_3 = \overline{H}$. Essi costituiscono una classe completa di eventi incompatibili, infatti:

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset, \quad C_1 \cap C_3 = \emptyset, \quad C_2 \cap C_3 = \emptyset, \quad C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \Omega.$$

Allora, dette x_1, x_2, x_3 le probabilità dei costituenti si ha:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Inoltre la (3.3) si può esprimere anche nella seguente maniera:

$$\sum_{C_h \subseteq E \cap H} x_h = p(E / H) \sum_{C_h \subseteq H} x_h \tag{3.5}$$

ossia

$$x_1 = p(E / H)\, (x_1 + x_2). \tag{3.6}$$

4. LA FORMULA DI BAYES

Per il teorema delle probabilità composte si ha che:

$$p(\overline{H} \cap E) = p(\overline{H})\, p(E / \overline{H}) \tag{4.1}$$

Sommando membro a membro la (3.3) e la (4.1) e tenendo conto della proprietà commutativa del prodotto logico, si ha:

$$p(E \cap H) + p(E \cap \overline{H}) = p(H)\, p(E / H) + p(\overline{H})\, p(E / \overline{H})\ ;$$

ma $E \cap H$ e $E \cap \overline{H}$ sono due eventi incompatibili e quindi per la (2.1) il primo membro è uguale a $p\,[(E \cap H) \cup (E \cap \overline{H})]$.

Essendo inoltre $(E \cap H) \cup (E \cap \overline{H}) = E$, si ottiene:

$$p(E) = p(H)\, p(E / H) + p(\overline{H})\, p(E / \overline{H}) \; . \tag{4.2}$$

Dalla (3.4) si ricava, se $p(E) > 0$, che:

$$p(H / E) = \frac{p(E \cap H)}{p(E)} = \frac{p(H \cap E)}{p(E)} = \frac{p(H)\, p(E / H)}{p(E)}$$

e, quindi, per la (4.2):

$$p(H/E) = \frac{p(H)\, p(E / H)}{p(H)\, p(E / H) + p(\overline{H})\, p(E / \overline{H})} . \tag{4.3}$$

Quest'ultima è la formula di Bayes che consente, in base al verificarsi di un evento E che sintetizza i dati osservati, di rivalutare con $p(H/E)$ la probabilità di un evento H, probabilità che inizialmente, cioè prima della raccolta dei dati, era stata valutata uguale a $p(H)$.

In base alle nostre conoscenze sull'evento H abbiamo fatto una certa valutazione $p(H)$ della sua probabilità (classica, frequentista, soggettiva) ma nutriamo forti dubbi che se avessimo su H maggiori informazioni, la nostra valutazione sarebbe più veritiera.

Andiamo ad osservare, allora, un altro fenomeno, descritto dall'evento E sul quale è possibile fare delle prove (o acquisirle), il cui esito è influenzato dal verificarsi o meno di H. Conosciuto il risultato di questa osservazione, modifichiamo $p(H)$ sostituendola con $p(H / E)$ calcolata con la (4.3), purchè sia possibile calcolare le probabilità che compaiono a secondo membro, cioè valutare in quale misura il verificarsi o meno di H influisce sul verificarsi di E.

Questa interpretazione giustifica l'impiego della formula di Bayes in molteplici campi (medico, legale, strutturale, farmacologico, geologico, etc.) per misurare il grado di validità di una ipotesi formulata (evento H), mediante la conoscenza di dati sperimentali (evento E). Nei prossimi paragrafi si effettuano due esempi adatti a mostrare l'uso consapevole e la validità scientifica di tale formula.

Approfondimenti e molti altri esempi si possono trovare in Daboni, [2], Di Biase - Maturo, [6] e Scozzafava, [9].

Il primo, mutuato dai giochi con le carte, è particolarmente utile agli insegnanti delle scuole secondarie che facciano un po' di calcolo delle probabilità. Il secondo riguarda un'applicazione nell'ambito della diagnostica clinica.

5. UN ESEMPIO

Supponiamo di avere tre mazzi di carte napoletane A, B, C, identici all'apparenza, ma tali che nel mazzo B le dame sono state sostituite scambiandole con gli assi del mazzo C in modo che B ha otto figure (e otto assi) e C ne ha sedici (e nessun asso).

Ci proponiamo in primo luogo di calcolare la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo scelto a caso, esca una dama ed in secondo luogo di fare un'ipotesi su quale sia il mazzo da cui è stata presa. Consideriamo in proposito gli eventi:

E = "la carta estratta è una dama",

H_j = "è stato scelto il mazzo *j*" con $j \in \{A, B, C\}$.

Poiché i mazzi apparentemente sono uguali è naturale assumere:

$$p(H_J) = \frac{1}{3}, \quad \forall J \in \{A, B, C\}.$$

Inoltre, dalle informazioni in nostro possesso, si ha:

$$p(E / H_A) = \frac{4}{40}, \quad p(E / H_B) = 0, \quad p(E / H_C) = \frac{8}{40}.$$

Poichè {A, B, C} è una partizione di Ω, E si può scindere nella somma di eventi incompatibili:

$$E = (E \cap H_A) \cup (E \cap H_B) \cup (E \cap H_C).$$

Pertanto dalla (2.1) si deduce:

$$p(E) = p(E \cap H_A) + p(E \cap H_B) + p(E \cap H_C)$$

e dalla (3.4):

$$p(E) = \sum_J p(H_J)\, p(E / H_J) = \frac{1}{10}$$

che coincide con la media delle $p(E / H_J)$ ponderata con le $p(H_j)$.

Per valutare in maniera più soddisfacente le

$$p(H_J),\ \forall j \in \{A, B, C\}$$

possiamo fare ricorso alla formula di Bayes utilizzando delle informazioni aggiuntive.

Osserviamo l'esito di alcune estrazioni sul mazzo prescelto ed indichiamo con D tale evento. In base al risultato possiamo correggere le $p(H_j) = 1/3$ con i valori $p(H_J / D)$, $\forall J \in \{A, B, C\}$.

Sia D = "in due estrazioni successive è uscita una figura".

Si ha:

$$p(D / H_A) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}; \quad p(D / H_B) = \frac{8}{40} \cdot \frac{7}{39} = \frac{7}{195};$$

$$p(D / H_C) = \frac{16}{40} \cdot \frac{15}{39} = \frac{2}{13}; \quad p(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{130} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{195} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{13} = \frac{107}{1170}$$

da cui applicando la formula di Bayes si ottiene:

$$p(H_A / D) = \frac{33}{107}, \quad p(H_B/D) = \frac{14}{107}, \quad p(H_C / D) = \frac{60}{107}.$$

Il procedimento può essere iterato un numero qualsivoglia di volte effettuando altre estrazioni che ci consentono di perfezionare progressivamente le valutazioni di probabilità riguardo le ipotesi sul mazzo scelto a caso, sostituendo nella formula di Bayes le probabilità a priori con quelle a posteriori ottenute al passo precedente.

6. UN'APPLICAZIONE

Un esempio classico di tipo applicativo, molto sfruttato in letteratura, a volte anche in modo erroneo, è quello di un medico che deve diagnosticare una malattia sulla base di alcuni sintomi accusati da un paziente.

Qui si considera il caso in cui il paziente, Carlo, ed il dottore, Franco, sono due miei amici. Carlo, durante un aperitivo in compagnia, ci comunica di soffrire da un po' di giorni un certo malessere. Franco pensa subito che i sintomi denunciati possano derivare da una malattia H, piuttosto diffusa in quel periodo nella nostra città. Infatti sa che due malati su tre in città sono affetti dal virus che provoca H. Conoscendo la mia passione per la probabilità soggettiva ed avendo appreso, durante le numerose chiacchierate sull'argomento, che è lecito assumere come probabilità le frequenze relative, Franco, nel considerare $p(H) = 0{,}6\overline{6}$, è propenso a diagnosticare a Carlo la malattia H.

Ma, pungolato dalla mia presa in giro sulla scarsa professionalità della categoria dei medici, indaga più approfonditamente sulla sintomatologia presentata da Carlo e lo invita in laboratorio per una visita.

Durante la visita, individuando la presenza di altri sintomi non palesati in precedenza, consulta l'archivio del suo personal computer e verifica che, nella popolazione da lui assistita, la frequenza relativa con cui tali sintomi si manifestano in presenza della malattia H è pari a 0,15. Inoltre osserva che, in assenza di H, la sintomatologia riscontrata è presente con una frequenza relativa pari a 0,72.

Fornitimi questi dati invito il dottore ad usare la formula di Bayes.

Identificando probabilità e frequenza, indicato con E l'evento "presenza dei nuovi sintomi", essendo:

$$p(E / H) = 0{,}15\ , \quad P(E / \overline{H}) = 0{,}72$$

dalla (4.3) si ottiene:

$$p(H / E) = \frac{0.6\overline{6} \times 0.15}{0.6\overline{6} \times 0.15 + 0.3\overline{3} \times 0.72} = 0.29, \tag{6.1}$$

e, di conseguenza, $p(\overline{H} / E) = 0,71$.

A questo punto stupore e perplessità traspaiono nello sguardo di Franco che si rende conto immediatamente dell'errore che avrebbe commesso nel diagnosticare la malattia H.

Incuriosito ed affascinato dal semplice, ma allo stesso tempo potente, modello probabilistico utilizzato, Franco mi invita ad approfondire l'argomento.

Allo scopo di fare una diagnosi più attendibile gli propongo di seguire uno dei seguenti metodi che, volendo, possono essere usati anche simultaneamente.

a) Se è possibile, si prendono in considerazione tutte le malattie $H_1, H_2, \ldots, H_n$, che sono causa dei sintomi riscontrati, tali che:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega \quad \text{e} \quad H_i \cap H_j = \varnothing \quad \forall\, i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

In tal caso, scomponendo E in somma logica di eventi incompatibili, si deduce che la (4.3) viene riformulata nella seguente maniera:

$$(6.2) \qquad p(H_i / E) = \frac{p(H_i)\, p(E / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(E / H_i)}, \; i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Tale formula ci consente, di calcolare la probabilità di ciascuna malattia possibile *a posteriori*, cioè dopo osservato E, purchè siano valutabili le probabilità *probative* $p(E / H_i)$, che esprimono il grado di fiducia sul verificarsi di E, in seguito all'informazione (eventualmente solo supposta) della verità della possibili malattie ipotizzate.

b) Si sottopone il paziente a dei test clinici in grado di convalidare la malattia che il medico ritiene più probabile, oppure di scartare quella che egli ritiene meno probabile.

Per il primo scopo esistono test ad alta sensibilità e, per il secondo, test ad alta specificità. La *sensibilità* di un test da indicazioni sulla probabilità che un soggetto malato presenti un risultato positivo al test, la *specificità* che un soggetto non malato ne presenti uno negativo.

Per chiarire le idee consideriamo la seguente tabella:

	TEST +	**TEST -**	**TOTALI**
MALATI	VP	FN	VP + FN
NON MALATI	FP	VN	FP + VN
TOTALI	VP+FP	FN + VN	VP + FN + FP + VN

ove:

TEST + = risultato positivo del test

TEST - = risultato negativo del test

VP = Veri Positivi (numero di individui positivi al test ed effettivamente malati)

FN = Falsi Negativi (numero di individui negativi al test ma risultati malati)

FP = Falsi Positivi (numero di individui positivi al test ma risultati non malati)

VN = Veri Negativi (numero di individui risultati negativi al test ed effettivamente non malati).

Indicato con s_e ed s_p rispettivamente la sensibilità e la specificità di un test si ha:

$$s_e = \frac{VP}{VP + FN}, \quad s_p = \frac{VN}{VN + FP}.$$

Fissato un test, se risulta $s_e > s_p$, esso si dice ad alta sensibilità; al contrario se $s_p > s_e$ il test è ad alta specificità.

Inoltre esistono dei criteri di tipo statistico (non esenti da critiche, ma abitualmente accettati), che consentono di valutare l'errore commesso nel considerare un test ad alta sensibilità o specificità.

Nell'esempio, essendo $p(H / E) = 0{,}29$ e $p(\overline{H} / E) = 0{,}71$, è ragionevole pensare che il medico suggerisca al paziente di effettuare dei test idonei a ricusare la malattia "indagata", ossia dei test ad alta specificità.

Sia $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ una batteria di tali esami di laboratorio. Indichiamo con T_i l'evento "un soggetto ha avuto un risultato negativo rispetto all'i-esimo test" $i \in \{1, 2, 3\}$.

Le informazioni fornite da un laboratorio specializzato vengono sintetizzate in una tabella che contiene le frequenze relative di risultati negativi della batteria T, associata all'assenza della malattia H, con un errore fissato, rilevata su un campione di individui.

In tale maniera, identificando probabilità e frequenze possiamo assumere note le $p_i = p(T_i / H)$, $i \in \{1, 2, 3,\}$ che rappresentano le probabilità che un soggetto ha di presentare un risultato negativo al test T_i, non avendo contratto la malattia H.

Poichè tali esami hanno un costo elevato, supponiamo che il dottore decida di prescriverne solo due, ad esempio T_1 e T_2.

Dopo aver osservato l'evento $E = T_1 \cap T_2$ = "il paziente è risultato negativo a T_1 e a T_2", possiamo nuovamente applicare la formula di Bayes nella forma:

$$(6.3) \qquad p(\overline{H} / E) = \frac{p(\overline{H})\, p(E / \overline{H})}{p(\overline{H})\, p(E / \overline{H}) + p(H)\, p(E / H)}$$

sostituendo le probabilità *a priori* $p(\overline{H})$ con quella *a posteriori* ottenuta con la (6.1).

Non essendoci ragioni per considerare indipendenti stocasticamente gli eventi T_1 e T_2 (vedi ad esempio Scozzafava in [11] e Di Biase [4]), in genere si avrà:

$$p(E / \overline{H}) = p(T_1 \cap T_2 / \overline{H}) \neq p(T_1 / \overline{H})\, p(T_2 / \overline{H})$$

$$p(E / H) = p(T_1 \cap T_2 / H) \neq p(T_1 / H)\, p(T_2 / H).$$

Pertanto, dai dati raccolti presso il laboratorio, il dottore che conosce il calcolo delle probabilità non è in grado di valutare le probabilità che compaiono a secondo membro della (6.3).

A questo punto o si approfondiscono le indagini presso il laboratorio, deducendo tabelle di frequenza in cui i test della batteria T vengono considerati anche due a due, oppure, applicando in maniera estrema la teoria soggettiva, il dottore esprime, in base alla sua esperienza, il proprio grado di fiducia nei riguardi di $p(E\,|\,\overline{H})$ e $p(E\,/\,H)$.

Supponiamo che egli ritenga ragionevoli le seguenti valutazioni.

$$p(E\,/\,\overline{H}) = 0.80 \quad , \quad p(E\,/\,H) = 0.12. \tag{6.4}$$

Per procedere in maniera corretta è necessario, però, verificare la *coerenza* di tali valutazioni.

Assegnata la coppia di eventi $E\,/\,\overline{H}$ ed $E\,/\,H$ i costituenti ad essa associati si possono trovare eseguendo tutti i possibili prodotti logici, diversi dall'evento impossibile Ø, tra i costituenti associati ed $E\,/\,\overline{H}$ e quelli associati ad $E\,/\,H$. Si ottiene:

$$C_1 = E \cap H \quad , \quad C_2 = \overline{E} \cap H \quad , \quad C_3 = E \cap \overline{H} \quad , \quad C_4 = \overline{E} \cap \overline{H},$$

Se indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 le loro rispettive probabilità, che ovviamente sono incognite si ha:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \tag{6.5}$$

Allora, affinchè valga il teorema delle probabilità composte nella forma (3.5), si deve avere:

$$x_3 = 0.80(x_3 + x_4), \tag{6.6}$$

$$x_1 = 0.12(x_1 + x_2). \tag{6.7}$$

Si dimostra (vedi ad esempio Gilio in [6]) che condizione sufficiente per la coerenza dell'assegnamento $p(E\,/\,\overline{H}) = 0{,}80$ e $p(E\,/\,H) = 0{,}12$ è che esistano x_1, x_2, x_3, x_4 tutti positivi e soddisfacenti le (6.5), (6.6) e (6.7). Allo scopo in Di Biase, [5], è stata implementata una procedura automatica per verificare la coerenza di un numero n qualsiasi (finito e compatibile con la capacità di calcolo e la memoria dell'elaboratore usato) di eventi condizionati.

Poichè ad esempio i numeri:

$$x_1 = 0.084, \quad x_2 = 0.616, \quad x_3 = 0.240, \quad x_4 = 0.06$$

soddisfano le condizioni richieste, possiamo inserire i valori (6.4) nella (6.3).

Si ottiene:

$$P(\overline{H} / E) = \frac{0.71 \text{ x } 0.80}{0.71 \text{ x } 0.80 + 0.29 \text{ x } 0.12} = 0.94$$

$$P(H / E) = \frac{0.29 \text{ x } 0.12}{0.29 \text{ x } 0.12 + 0.71 \text{ x } 0.80} = 0.06.$$

In conclusione (per così dire) essendo la probabilità di assenza della malattia H, avendo osservato il risultato negativo dei test T_1 e T_2, molto maggiore di quella di presenza di H in seguito alla stessa osservazione, è ragionevole scartare la malattia H dal novero delle possibilità e, quindi, il mio amico Franco dovrà sudare sette camice, nel continuare le sue indagini!

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUNO G. e GILIO A. (1979). *La probabilità dal punto di vista soggettivo: breve introduzione*. Quaderni dell'Istituto di Comunicazioni Elettriche Università La Sapienza di Roma.

[2] DABONI L. (1993) *Calcolo delle Probabilità ed elementi di statistica.* Utet, Torino.

[3] DE FINETTI B. (1979) *Teoria della Probabilità.* Vol I, Einaudi, Torino.

[4] DI BIASE G. (1990) *Sul concetto di indipendenza tra eventi.* Atti del Convegno Nazionale Mathesis: "Matematica negli anni novanta", Iseo (BS), Aprile '90, pp. 161-172.

[5] DI BIASE G. (1994). *Sulla ricerca di un insieme di probabilità condizionate coerenti nei sistemi esperti.* Atti del XVIII Convegno Amases, Modena , sett. 1994, pp. 357-368.

[6] DI BIASE G. e MATURO A. (1992) *La formule de Bayes dans l'induction statistique.* Plot n. 60, Editeur: Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, pp. 7-13.

[7] GILIO A. (1990) *Criterio di penalizzazione e condizioni di coerenza nella valutazione soggettiva della probabilità.* Bollettino Umi (7) 4-B, pp. 645-660.

[8] MATURO A. (1992) *Una introduzione alla probabilità soggettiva.* Periodico di Matematiche, serie VI, vol. 68, n. 3 - 1992, pp. 19-36.

[9] SCOZZAFAVA R. (1993) *Le probabilità soggettiva e le sue applicazioni.* III edizione, Masson, Milano.

[10] SCOZZAFAVA R. (1991) *Le probabilità condizionate: de Finetti o Kolmogoroff?* Scritti in omaggio a Luciano Daboni, ed. Lint, Trieste, pp. 223-237.

[11] SCOZZAFAVA R. (1990) *Aspetti soggettivi del concetto di indipendenza.* Induzioni n. 0, 1990, ed. Giardini, Firenze, pp. 15-18.