Osservazioni sulla distribuzione dei numeri primi dei tipi (6n - 1) e (6n + 1) - n ≥ 1 intero.

F. Eugeni, Dip. di Ingegneria Elettrica, L'Aquila
G. Moro, Ammiraglio della Riserva, Roma

Sommario - Si riportano i principali elementi, emersi dall' analisi effettuata sulla distribuzione dei numeri primi dei tipi (6n-1) e (6n+1) - per $1 \le n \le 16666667$ - cioè per $1 \le (x) \le 100000002$, ove (x) indica la "fascia" da 0 ad (x) degli interi di riferimento.
Si accenna ad un confronto fra gli elementi emersi sulla distribuzione dei primi dei tipi (6n-1) e (6n+1) e su quelli della distribuzione dei primi dei tipi (xn-1) e (xn+1).

1. Generalità sulla teoria dei Numeri

Nell'edificio generale della Teoria dei Numeri giocano un ruolo primario i "Numeri Primi".Un Primo è un numero maggiore di 1 che è divisibile solo per se stesso e per l'unità. A tentativi si trovano subito i numeri primi:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47.

Fin dai tempi di Euclide è ben noto che l'insieme dei numeri primi è infinito,ma tale insieme non è "concretamente noto" nel senso che non si conosce una legge che ci permetta di dire se un dato numero è primo o no. In realtà esiste il teorema di Wilson asserente che "n" è un primo se e solo se:

$$(n-1)! \equiv -1 \text{ modulo "n"}$$

Ci si convince facilmente che questo teorema non è atto a caratterizzare l'insieme dei primi. Non si conosce alcun insieme contenente infiniti primi. Dunque non si sa molto della distribuzione dei numeri primi.
Perfino la loro distribuzione in intervalli corti sembra estrema mente irregolare.
Questo è il motivo per cui appare impossibile trovare una formula semplice che descriva la distribuzione de numeri primi in qualunque dettaglio.
Euclide ha provato che ci sono infiniti numeri primi;Legendre e Gauss nel 1800,hanno ipotizzato alcuni dei teoremi fondamentali: la teoria allo stato attuale è un miscuglio di problemi irrisolti,congetture più o meno logiche e solo alcuni teoremi dimostrati.
I teoremi dimostrati coprono ,inoltre, solo casi molto semplici, comparati alle supposizioni esistenti.
Le dimostrazioni sono in genere molto complicate basandosi su teoremi della teoria delle funzioni.
Nella ricerca di formule che producano tutti numeri primi (e nessun altro numero) sono stati trovati alcuni polinomi notevoli, i cui valori contengono una percentuale sorprendentemente alta di numeri primi .
Uno di questi è:

$$P(x) = x^2 - x + 17$$

che è numero primo per x=0,1,2,3,...,16 ma risulta composto per x=17,dato che $P(17) = 17^2 - 17 + 17$. Ancora un'alta percentuale per il polinomio:

$$x^2 - x + 41$$

che produce numeri primi per x=0,1,2,...,40 ed è composto naturalmente per x=41. Un altro polinomio più ricco in numeri primi dei precedenti è:

$$2x^2 - 199$$

che produce 150 numeri primi per x=0,1,2,...,198.
La dimostrazione che nessun polinomio(non costante) può produrre solo numeri primi è abbastanza semplice.
Precisando quanto detto in precedenza ,in realtà esistono formule che producono tutti numeri primi e nessun altro numero;tuttavia,queste sono un "imbroglio" poichè esse presuppongono in qualche modo due cose:

1. la conoscenza dell'insieme dei primi
2. fanno affidamento sulla falsa definizione di un numero primo come numero non-composto.

Esistono vari esempi di queste formule,alcuni complicatissimi da dimostrare,altri molto lunghi,ma tutti indiscutibilmente contengono qualche errore.
Alcuni di essi si basano sull'esistenza di un polinomio speciale che produce solo primi positivi.
In realtà polinomi così fatti non esistono il che ci induce a pensare che si debba ricorrere a qualche stratagemma per arrivare ad un polinomio che produce tutti numeri primi positivi ed un largo numero di interi composti negativi.
Riportiamo ora l'estremamente brillante prova di Euclide dell'infinità dei numeri primi.
Egli dimostrerà che dato un insieme finito di primi si può costruire un altro insieme di primi più grande che nel precedente non ci sta.
Supponi che esista solo un numero finito di numeri primi,$p_1, p_2, \ldots p_n$.
Ora considera l'intero $N = p_1, p_2, \ldots p_n + 1$.
Nessuno dei numeri primi esistenti divide N,dato che la divisione N / p_i darà sempre resto 1.
Così o N è un (nuovo) numero primo,oppure N contiene un (nuovo) fattore primo,che è diverso da tutti quelli dati.
Perciò concludiamo che ci deve essere un infinità di numeri primi.
Molti matematici ,nel corso dei secoli,si sono cimentati nello studio dei numeri primi.
Molte menti geniali nel campo delle scienze matematiche hanno cercato di svelare questo misterioso segreto che permea i numeri primi.
Alcuni di essi hanno elaborato teorie complicatissime, altri, teoremi più semplici ma tutti sono arrivati ad una stessa conclusione:
<< Niente di preciso si sa sui numeri primi >>.
Esempi di quanto detto sono proprio le formule di Gauss e Legendre.
Sia Gauss che Legendre,indipendentemente l'uno dall' altro,si interessarono del grande mistero dei numeri primi.
Si occuparono entrambi di un problema che in qualche modo può essere considerato una restrizione al problema più generale del calcolo dei numeri primi.
Essi,infatti, si occuparono del calcolo del numero dei numeri primi minori o uguali di un certo x fissato indicato con $\pi(x)$.
1. Dal loro studio si ottengono risultati davvero interessanti:
Si vede che la densità dei numeri primi in un intorno di x decresce lentamente al crescere di x.

2. paragonando i valori trovati per $x = k^n$ e $x = k^{2n}$ con $k \in \mathbb{N}$ si nota che la densità dei numeri primi è approssimativamente dimezzata quando x è elevata al quadrato.

A livello matematico la densità che appare nella 2. può essere descritta con buona approssimazione dalla funzione 1/ln (x) poichè, ad esempio:

$$1 / \ln(x^2) = 0{,}5 / \ln(x)$$

Se si stila una tabella per la densità dei primi del tipo $x = k^n$ e 1/ln(x) notiamo solo delle piccole differenze tra i valori dell'una e dell'altra che sono dovute ad irregolarità locali nella distribuzione dei numeri primi , che più pesantemente influenza il numero dei numeri primi in intervalli brevi più che in quelli ampi.

Verso la fine del 1800(1896) Hadamard e De la Vallèe-Poussin, anche essi indipendentemente l'uno dall'altro , provarono quello che andò sotto il nome di Teorema Dei Numeri Primi, il cui enunciato è il seguente:

$\pi(x)$ è approssimativamente uguale a li(x) (dove li(x) è il logaritmo intero di x).

Questo teorema si ricollega all'approssimazione di Gauss, infatti , il suo unico scopo è quello di fornire informazioni sull'errore introdotto dall'approssimazione di Gauss.

Più precisamente esso afferma che l'errore relativo dell'approssimazione tende a 0 quando x tende ad ∞.

Le approssimazioni a $\pi(x)$ di Gauss e Legendre sono state trovate con metodi empirici.

Il matematico Riemann, invece, fu il primo che sistematicamente dedusse relazioni tra i numeri primi e le già note funzioni di Gauss e Legendre. Egli prese spunto da una relazione scoperta già da Eulero:

$$\tau(s) = \sum_{1}^{\infty} 1 / n^s = \prod_{p} 1 / 1 - p^{-1}$$

dove il prodotto infinito è preso sopra tutti i numeri primi.

Questa funzione τ(s) prese il nome di funzione zita di Riemann ed assunse una importanza eccezionale perchè da essa si possono dedurre molte proprietà dei numeri primi .
Essa , in sostanza, trasforma le proprietà dei numeri primi nelle proprietà della somma perchè rapporta ciascun numero primo "p" alla semplice somma:

$$\sum_{1}^{\infty} n^{-s}$$

Il legame che esiste tra la funzione zita di Riemann ed i numeri primi risulta evidente osservando.,nella già citata formula $\tau(s)=\prod_{p} 1/1-p^{s}$, il prodotto infinito .Attraverso questo studio Riemann trovò che la funzione

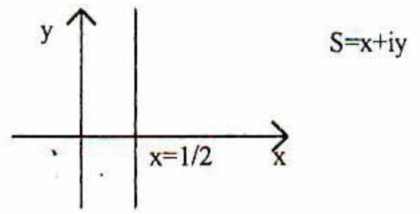
$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}(1/n)\pi(x^{1/n})$$

è di importanza vitale , più che π(x) stesso, per lo studio della relazione desiderata tra π(x) e τ(s).
Nel 1859 lo stesso Riemann pubblicò la seguente formula:

$$f(x)=li(x)-\sum_{p} li(x^{p})+\int_{x}^{\infty}\frac{dt}{(t^{2}-1)t\ln t}-\ln 2 \quad (1.0)$$

che nel 1859 fu provata da Maugoldt.
In relazione a numerose indagini effettuate da egli stesso sulla (1.0), Riemann formulò la sua famosa congettura, per cui è stata trovata, probabilmente, una prova da H. Matsumoto nel 1984 (questa prova non è stata ancora studiata attentamente da altri matematici per poter essere ritenuta valida).

Riemann formulò così la sua celebre congettura che ancora oggi è un mistero da scoprire.
Nella congettura si afferma che i numeri complessi s=x+iy , fra i quali τ(s)=0 , sono infiniti e sono tutti situati sulla retta $x=\frac{1}{2}$ del piano di Gauss, come rappresentato nel grafico seguente:



Attraverso teoremi di natura molto complessa è stato provato da Brent e da altri matematici che la congettura di Riemann, per un numero finito di zeri (circa 1000000000), risulta essere vera cioè che effettivamente $x=\frac{1}{2}$.

E' possibile dalla $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\pi(x^{1/n})$, precedentemente citata, esprimere $f(x)$ in funzione di π(x).
Se si vuole trovare un collegamento in questo senso, si può far uso della seguente formula inversa :$\pi(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}li(x^{1/n})$ dove la funzione μ(n) è la funzione di Mobius,definita da:

μ(n)=
a) 1 se n=1
b) 0 se n contiene alcuni fattori primi multipli
c) (-1^{k}) se n è il prodotto di k distinti numeri primi

Se, come detto precedentemente, f(x) è approssimata da li(x) si ottiene quella che va sotto il nome di Formula dei Numeri Primi di Riemann:

$$R(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{1/n})$$

La chiave di lettura di questa formula è proprio l'approssimazione di Gauss a li(x).

Da un attento esame della formula di Riemann si possono osservare i seguenti due fatti:

1. per ampi valori di x , li(x) ed in particolare R(x), sono prossimi a π(x).
2. R(x)-π(x) ha un grande numero di variazioni di segno , che spesso caratterizzano una buona approssimazione .

Dall' osservazione 2) si può trarre l'impressione che li(x) sia sempre maggiore di π(x).

Questa ,in realtà, è una famosa vecchia congettura nella teoria dei numeri primi.

Il primo ad interessarsi al problema del segno di li(x)-π(x) fu Littewood, il quale dimostrò che tale funzione cambia segno infinite volte.

Inoltre i limiti di Littewood per li(x)-π(x) mostrano che tale differenza , per alcuni grandi valori di x, può diventare molto più ampia di li(x)-R(x).

Grazie a tale osservazione , la buona approssimazione di R(x) a π(x) risulta essere ingannevole.

Quanto detto è un chiaro esempio di come, spesso, ragionamenti basati su evidenze numeriche possano condurre a conclusioni completamente errate.

Se si ammette per vera l'ipotesi di Riemann, il Teorema dei Numeri Primi si può scrivere nella forma: $\pi(x) \underset{c}{=} li(x) + o(\sqrt{x}\ln(x))$, dove "c" indica che questo risultato è solo una congettura che deve essere ancora provata .

Nel 1962 furono scoperte da Barkley e D. Sehoenfeld, a testimonianza di come questo ramo della matematica sia a tutt'oggi sconosciuto, alcune eleganti inesattezze per i valori di π(x).

Supponi che a et b sono interi positivi e considera tutti i numeri interi formanti una progressione aritmetica an+b , n=0,1,2,... .
Quanti di questi numeri minori o uguali ad x sono primi?

Indica questo totale con $\pi_{a,b}(x)$. Affinchè an+b non contenga affatto alcun numero primo, è chiaro che il più grande divisore comune (a,b) di a et b deve essere uguale ad 1 (eccetto che nell'ovvio caso in cui "b" è un numero primo et "a" è preso come multiplo di "b", nel qual caso an+b conterrà proprio un numero primo, "b").
Se questa condizione è soddisfatta, una certa proporzione di tutti i numeri primi , $\frac{1}{\varphi(a)}$, dove φ(a) è la funzione di Eulero, appartiene alla serie aritmetica non appena $x \to \infty$ . .
Utilizzando il Teorema dei Numeri Primi, questo dà il seguente Teorema di Dirichlet, la cui prova non fu completata fino a quando De la Vallée-Paussin diede la sua prova del Teorema dei Numeri Primi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_{a,b}}{li(x)}(x) = \frac{1}{\varphi(a)}$$

Il Teorema di Dirichlet afferma che i numeri primi sono approssimativamente equi-distribuiti tra quelle serie aritmetiche della forma an+b , per un valore fissato di "a", che contiene diversi numeri primi.
Il Teorema di Dirichlet ci dice anche che ogni serie aritmetica an+b con (a,b)=1, contiene infinitamente molti numeri primi.
Tanto per dare un esempio: ci sono infinitamente molti numeri primi che terminano in 33333, come 733333,1133333, 2633333,2833333,... , perchè la serie 100000n+33333 contiene, a lungo andare $\frac{1}{40000}$ di tutti i numeri primi.

Spesso ci può interessare qualche problema ben posto ma di difficoltà non così elevata come quella dei grandi problemi insoluti. In questo ambito si inquadra lo studio della distribuzione dei primi di forma prestabilita entro intervalli definiti.
Nel presente ambito si può inquadrare un lavoro di G. Moro [ ].
Nel seguente lavoro si affronta un'analisi sulla distribuzione dei numeri primi delle forme $6n \pm 1$ per $1 \leq n \leq 16666667$.

2.-<u>L'analisi delle successioni.</u>

2.1-<u>Premessa</u>.
G. Moro aveva ottenuto in lavori precedenti (1)-(2), dei risultati ottenuti nello studio della distribuzione dei primi dei tipi (6n-1) e (6n+1), nella "fascia" $0 \leq (x) \leq 400002" - (n \leq 66667)$. <u>Indichiamo con</u>:

(1) $M_{6,5}(x)$-il numero dei primi del tipo (6n-1)

(2) $M_{6,1}(x)$-il numero dei primi del tipo (6n+1)

(3) $S_6(x)=M_{6,5}(x)-M_{6,1}(x)$- lo "<u>scarto</u>", fra:
-i numeri dei primi del tipo (5x-1);
-e quello del tipo (6x+1);
contenuti in (x).

(4) $DS_6(x)=S_6(xm+1)-S_6(xm)$ lo "<u>spostamento</u>" fra:
-lo "<u>scarto</u>" relativo alla "fascia" (xm+1);
-e lo "<u>scarto</u>" relativo alla "fascia" (xm), che la precede immediatamente.

<u>I principali risultati ottenuti, si possono così sintetizzare</u>:

(1) "Fascia" $0 \leq (x) \leq 400002$.
(5) $S_6(x)$, è sempre positivo, per (x) qualsiasi.

(2) <u>Per i "gruppi" di valori di (x), che coprono la "fascia"</u> $0 \leq (x) \leq 400002$<u>, così definiti</u>:

$$0 \leq (x) \leq 100000$$
$$100001 \leq (x_2) \leq 2000$$
$$200001 \leq (x_3) \leq 300000$$
$$300001 \leq (x_4) \leq 400002$$

si è fatto variare (x) a passo 1000 - a partire da 0. Per ciascuno dei quattro "gruppi" di valori di (x) di cui sopra, si sono così ottenuti 100 valori, equidistanti, crescenti di (x).

Per ciascuno di questi quattro "gruppi" di valori di (x), si sono determinati 100 valori di:

$M_{6,5}(x)$ $M_{6,1}(x)$ e di $S_6(x)=M_{6,5}(x)-M_{6,1}(x)$

Nell'ambito di ciascuno dei quattro "gruppi" di valori di (x), per $S_6(x)$, si sono determinati:

(6) i valori minimi: $S_6(x)$min.

(7) i valori massimi: $S_6(x)$max.

(8) i valori medi (aritmetici, su 100 valori): $S_6(x)$med.

Ecco i risultati ottenuti:

"gruppo"	S6 (x1)				
	Nr.	valori			
	Valori	min.	med.	max	(med+max):2
(x_1)	100	5	23.83	42	23,5
(x_2)	100	7	29.18	65	36
(x_3)	100	18	47.99	80	49
(x_4)	100	34	57.77	83	58,5

Come considerazione di carattere generale, si può fare la seguente constatazione:

"al crescere di (x), i singoli valori di $S_6(x)$-a passo 1000- sono fluttuanti, ma generalmente crescenti".

(10)

Le caratteristiche rilevate nell'andamento dei valori di $S_6(x)$, ci hanno convinto della opportunità di estendere le vecchie ricerche effettuate fino ad (x)=400002, a valori ben maggiori di (x).

Solo recentemente, però, (1991), si è potuto disporre dell'uso dei mezzi di calcolo, e del contributo del personale idoneo, necessari per poter effettuare le ricerche che ci eravamo prefisse.

* * * * * * * *

3- Ricerche effettuate per $0 \leq (x) \leq 100000002$.

3.1- Generalità.

Le ricerche sono state condotte a "passo" 10^x facendo assumere ad (x) i seguenti valori:

$10^x - 2 \cdot 10^x - 3 \cdot 10^x - \ldots\ldots - 10^x \cdot 10^x$

Con tale "passo" di avanzamento di (x) sono stati determinati i valori dei parametri (vedere: (1)-(2)-(3)-(4)).

(10) $M_{6,5}(x)$-(11)$M_{6,1}(x)$-(12)$S_6(x)=M_{6,5}(x)-M_{6,1}(x)$

(13) $DS_6(x)=S_6[(m+1)10^x]-S_6(m10^x)$

($m \geq 1$, intero).

Dall'esame dei 10^x valori di $S_6(x)$, come sopra indicato, risultano confermati i "fenomeni" già rilevati per $0 \leq (x) \leq 400002$- a passo "1000" (anzichè 10000, come in questo caso), e cioè:

- $S_6(x)$ è sempre positivo (1x)→(5)
- i valori di $S_6(x)$ si presentano fluttuanti, ma generalmente crescenti, anche se il rapporto $S_6(x)$:(x) presenta andamento decrescente, al crescere di (x). (15)→(10)

3.2- Grafico (campionato) dei valori di $S_6(x)$.

Per fornire un'idea immediata dell'andamento dei valori di $S_6(x)$, poichè non è pensabile di rappresentare in modo chiaro e completo i 10^x dati disponibili, ci si è limitati a riportare (vedere Delegato 1) una campionatura del loro grafico, relativa ai seguenti valori di (x):

$0 \leq (x) \leq 20 \cdot 10^5$ (parte iniziale)

*

$50 \cdot 10^5 \leq (x) \leq 55 \cdot 10^5$ (parte valori "bassi" di $S_6(x)$)

*

$70 \cdot 10^5 \leq (x) \leq 75 \cdot 10^5$ (parte valori "più alti" di $S_6(x)$)

*

$95 \cdot 10^5 \leq (x) \leq 100 \cdot 10^5$ (parte finale)

Per rendere la parte del "grafico" riportata, compatibile con lo spazio disponibile, si è proceduto con le seguenti modalità:

(1) Si sono considerati i seguenti valori crescenti di (x):

$$250 \cdot 10^3 - 500 \cdot 10^3 - 750 \cdot 10^3 - 10^5 - 1250 \cdot 10^3 - 1500 \cdot 10^3$$

$$(x_1) \quad (x_2) \quad (x_3) \quad (x_4) \quad (x_5) \quad (x_6)$$

* * * *

$$------- 99500 \cdot 10^3 - 99750 \cdot 10^3 - 100 \cdot 10^6$$

$$(x_{398}) \quad (x_{399}) \quad (x_{400})$$

("passo" di avanzamento: $250 \cdot 10^3$).

(2) - Per ciascun valore di (x): (x_1)-(x_2)-(x_3)-........-(x_{400}), si sono considerati, per $S_6(x)$, i seguenti valori:

$S_6(x)$min.

$\Rightarrow$ rilevati a "passo" 10^x

$S_6(x)$max.

$S_6(x)$med.- Media aritmetica di tutti i 25 valori di $S_6(x)$ rilevati in (x).
La campionatura del grafico, come già detto, è riportata nell'allegato 1.
Da tale grafico si rileva, immediatamente, quanto segue:
- è confermata - per $0 \leq (x) \leq 100000002$ - la validità delle (5)-(10), relative a $0 \leq (x) \leq 400002$;
- i valori minimi e massimi di $S_6(x)$, nelle varie "fascie" considerate, generalmente, non sono equidistanti rispetto ai relativi $S_6(x)$med.

3.3- Ulteriori ricerche in programma.

(Con la speranza di poter disporre dei mezzi, e dell'aiuto, necessari per poterle realizzare).
Da un primo esame, specifico, dei singoli valori dei parametri:
$S_6(x)$- vedere (12) e $DS_6(x)$ - vedere (13) determinati, e tabulati, per (x) crescente a "passo" 10^x, è emersa l'opportunità, per cercare di chiarire i meccanismi (se ne esistono e sono determinabili) che regolano le loro fluttuazioni, di effettuare le statistiche frequenziali dei valori assunti dai predetti due parametri.
Per un primo approccio dello studio del problema, tali due statistiche potrebbero essere effettuate con le seguenti modalità di base:

(1)- Raggruppare i valori determinati (per (x) crescente a "passo" 10^x) nei "gruppi" di seguito indicati:

$(x_1) \rightarrow 5 \cdot 10^5; (x_2) \rightarrow 10 \cdot 10^5; (x_3) \rightarrow 15 \cdot 10^5; \ldots\ldots$

$\ldots\ldots; (x_{18}) \rightarrow 90 \cdot 10^5; (x_{19}) \rightarrow 95 \cdot 10^5; (x_{20}) \rightarrow 100 \cdot 10^5.$

Effettuare la statistica frequenziale di $S_6(x)$, e quella di $DS_6(x)$, nell'ambito di ciascuno dei 20 suddetti "gruppi".

(2)- Dalle statistiche degli $S_6(x)$ e dei $DS_6(x)$ di cui al precedente punto (1), sommando i loro risultati, come di seguito indicato, passare alla statistica degli $S_6(x)$ e dei $DS_6(x)$, relative ai seguenti "super gruppi":

$(x_1)' \rightarrow (x_1)+(x_2)$; $(x_2)' \rightarrow (x_1)+(x_2)+(x_3)$;
$(x_3)' \rightarrow (x_1)+(x_2)+(x_3)+(x_4)$; $(x_4)' \rightarrow (x_1)+(x_2)+(x_3)+(x_4)+(x_5)$

*

$(x_5)' \rightarrow (x_6)+(x_7)$; $(x_6)' \rightarrow (x_6)+(x_7)+(x_8)$;
$(x_7)' \rightarrow (x_6)+(x_7)+(x_8)+(x_9)$; $(x_8)' \rightarrow (x_5)+(x_7)+(x_8)+(x_9)+(x_{10})$

*

$(x_9)' \rightarrow (x_{11})+(x_{12})$; $(x_{10})' \rightarrow (x_{11})+(x_{12})+(x_{13})$; ....
.... ; $(x_{12})' \rightarrow (x_{11})+(x_{12})+(x_{13})+(x_{14})+(x_{15})$

*

$(x_{13})' \rightarrow (x_{16})+(x_{17})$; .... ; $(x_{15})' \rightarrow (x_{16})+(x_{17})+(x_{18})+(x_{19})+(x_{20})$

* *

$(x_1)'' \rightarrow (x_4)'+(x_8)'$ $(x_2)'' \rightarrow (x_9)'+(x_{13})'$

* *

$(x_1)''' \rightarrow (x_1)''+(x_2)''$

Esaminare, infine, nell'ambito dei singoli "gruppi" e "super gruppi" i risultati delle varie statistiche effettuate per $S_6(x)$ e $DS_6(x)$ allo scopo di stabilire, se, e quanto le stesse si scostano dalla casualità teorica.

4 - Osservazioni.

Si sono confrontati i risultati ottenuti nello studio della distribuzione dei numeri primi del tipo $(6n \mp 1)$ con quelli - analoghi - relativi alla distribuzione dei numeri primi del tipo $(4n \mp 1)$, riportati nella pubblicazione (3) (vedere pagg. 79-84).

Dal confronto effettuato, almeno fino ad $(x) \leq 100 \cdot 10^6$, fra la distribuzione dei numeri primi del tipo $(6n \mp 1)$ e quella dei numeri primi del tipo $(4n \mp 1)$, unico elemento di differenziazione, che potrebbe presentare qualche interesse, è il seguente:

- i valori degli $S_6(x)$ sono sempre positivi;
- mentre quelli degli omologhi $S_n(x)$, pur essendo generalmente positivi, presentano saltuariamente "piccoli gruppi" (condensati) di valori negativi.

Le distanze (sull'asse delle (x)) di questi "gruppi" di valori negativi, apparentemente si presentano irregolarmente.

* * *

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano i signori CAMPITELLI ANDREA e DE BERARDINIS LUCA , alievi della facoltà di Ingegneria dell' Università dell'Aquila, per aver curato , anche criticamente , la redazione di questo lavoro.

Bibliografia

(1) - G. Moro - "memoria": "*Osservazioni sulla distribuzione dei numeri primi del tipo* $(6n \pm 1)$" - Atti del "Primo simposio su stato e prospettive della ricerca crittografica in Italia" - pagg. 156-161 - (Fondazione Ugo Bordoni - Roma 30-31 nov. 1987).

(2) - G. Moro - "Analisi crittografica e ricerca scientifica" - "Dimostrazione - Rienunciazione dell'ultimo teorema di Fermat" - Cap. V. (Pubblicazione edita a cura della Fondazione Ugo Bordoni - Roma 1990.)-

(3) - H. Poiesel.- *Prime Numbers and Computer methods for factorization-*
(Birkbauser - 1985).

(4) - M. Cerasoli, F. Eugeni e M. Protasi, *Elementi di Matematica Discreta,*
(Zanichelli, Bologna 1988).