RECENTI RISULTATI SUI GRUPPI DI AUTOMORFISMI DI ALCUNE NOTEVOLI STRUTTURE GEOMETRICHE

Gabor KORCHMAROS

Lo studio delle stutture geometriche discrete, prevalentemente di natura combinatoria, riveste una certa importanza nella teoria dei gruppi di permutazioni. In quest'ambito, sono tuttora in corso ricerche, ci è sembrato pertanto utile presentare una rassegna dei risultati esposti nei lavori elencati nella Bibliografia.

1. Le 3-reti

Un quasigruppo $(X,\cdot)$ consiste notoriamente di un insieme X e di una operazione binaria $\cdot$ definita su X e tale che comunque presi due elementi $a,b \in X$, ciascuna delle equazioni $a\cdot x=b$ e $y\cdot a=b$ ha una e una sola soluzione. Un cappio è un quasigruppo dotato di un elemento unità *e*. Una 3-rete $\mathcal{N}$ è una struttura geometrica che consiste di un insieme **P** di punti e di una famiglia **L** di parti di **P**, che si dicono *rette*, soddisfacenti le seguenti proprietà:

1) **L** *è suddivisa in 3 sottofamiglie disgiunte* $\mathbf{L}_i$ *(i=1,2,3);*
2) *ogni punto appartiene ad una e una sola retta di ciascuna sottofamiglia;*
3) *due rette di sottofamiglie diverse hanno esattamente un punto in comune;*
4) *esistono tre rette appartenenti a tre sottofamiglie diverse e non contenenti uno stesso punto.*

È naturale dire che due rette di una stessa sottofamiglia hanno la "stessa direzione" oppure che "sono parallele". Ad ogni quasigruppo $(X,\cdot)$ si può associare una 3-rete in modo che i punti siano le coppie ordinate di elementi di X e le 3 sottofamiglie siano formate dai seguenti sottoinsiemi di punti:

g_h = { (x,g) | g costante, $x \in X$}, rette orizzontali;
g_v = { (g,y) | g costante, $y \in X$}, rette verticali;
g_t = { (x,y) | $x \cdot y = g$; con g costante $x, y \in X$}, rette trasversali.

Viceversa, ogni 3-rete può essere coordinatizzata mediante un quasigruppo. Quelli che coordinatizzano una stessa 3-rete costituscono una classe di isotopia la quale contiene sempre un cappio.

Per l'ordine di una 3-rete si intende l'ordine di un (qualsiasi) quasigruppo che la coordinatizza.

Una collineazione di una 3-rete è una permutazione dei punti che mandi rette in rette. Le collineazioni di una 3-rete costituiscono un gruppo contenente un sottogruppo normale (di indice ≤ 6) che conserva ciascuna direzione (cioè manda rette parallele in rette parallele).

Una teoria generale delle 3-reti con particolare riguardo ai gruppi di collineazioni è stata sviluppata da Barlotti e Strambach [1], la quale è stata ulteriormente approfondita per una importante classe di 3-reti particolari, dette 3-reti involutorie con identità.

Definizione 1. - *Una 3-rete N si dice involutoria se gode della seguente proprietà configurazionale:*

> *la retta trasversale contenente il punto (a,b) contiene anche il punto (b,a).*

Si può verificare che una 3-rete è involutoria con identità se e solo se è coordinatizzabile mediante un cappio commutativo di esponente 2. Nel caso in cui tale cappio sia un gruppo (quindi un 2-gruppo abeliano elementare), la 3-rete associata è immergibile in un piano di Galois e prende il nome di 3-rete involutoria classica con identità. Una sua caratterizzazione in termini gruppali è data dal seguente teorema:

Teorema 1. ([10] Theorem 5) *Una 3-rete involutoria con identità è classica se e soltanto se ammette un gruppo di automorfismi che:*

(1) *contenga un sottogruppo normale risolubile,*

(2) *conservi le direzioni,*

(3) *muti in sé una retta trasversale e operi sui punti di essa come un gruppo di permutazioni 2-volte transitivo.*

Notiamo che l'ipotesi (1) è essenziale in quanto vi sono 3-reti involutorie con identità che non sono classiche pur dotate di un gruppo di automorfismi che godono di entrambe le proprietà (2) e (3).

2. Le $\begin{bmatrix}X\\t\end{bmatrix}$- geometrie con parallelismo

Continueremo a denotare con X un insieme finito di cardinalità n. Per analogia alle abituali notazioni di calcolo combinatorio, useremo il simbolo $\binom{X}{t}$ per indicare la famiglia dei t-insiemi di X (ossia i sottoinsiemi formati da esattamente t ($1<t<n$) punti). Osserviamo che $|\binom{X}{t}| = \binom{n}{t}$. Seguendo P. Cameron [3], introduciamo la nozione di parallelismo in $\binom{X}{t}$:

Definizione 2. - *Un parallelismo di* $\binom{X}{t}$ *è una relazione di equivalenza in* $\binom{X}{t}$ *soddisfacente la seguente proprietà:*

> *comunque presi un punto* $P \in X$ *e un t-insieme* $b \in \binom{X}{t}$ *esiste un unico t-insieme* $c \in \binom{X}{t}$ *contenente* P *e parallelo a* b.

Ricordiamo che per un noto teorema dovuto a Baranyai (vedi [3] p. 5), una $\binom{X}{t}$-geometria con parallelismo esiste se e solo se t divide n. Un automorfismo di una $\binom{X}{t}$-geometria con parallelismo è una permutazione su X che manda coppie di t-insiemi paralleli in coppie di t-insiemi paralleli. An automorfismo si dice stretto se ogni t-insieme e la sua immagine sono paralleli. Gli automorfismi stretti costituiscono un sottogruppo normale del gruppo degli automorfismi. Tale sottogruppo è piuttosto ristretto: per $t>2$ è addirittura banale mentre per $t=2$ è isomorfo ad un 2-gruppo abeliano elementare che opera su X come un gruppo di permutazioni semire-

golare. Il caso di $t=2$ riveste particolare importanza anche per il fatto che è una generalizzazione della nozione classica di spazio affine sopra GF(2).

Una proprietà che nasce in modo naturale nell'ambito di tali geometrie è la proprietà del parallelogramma (cfr. [3] p.19): Comunque presi tre t-insiemi $a,b,c \in \binom{X}{t}$ tali che $a\|b$, $a\neq b$ e $c\subseteq a\cup b$, risulta $c\|(a\cup b)-c$. Conviene notare che se $t=2$ la proprietà di parallelogramma asserisce che se una coppia di lati opposti di un quadrangolo sono paralleli, lo stesso vale per l'altra coppia di lati opposti. È curioso che la proprietà del parallelogramma non caratterizzi gli spazi affini sopra GF(2) nell'ambito delle $\binom{X}{t}$ geometrie con parallelismo. Esiste comunque una unica eccezione data dalla $\binom{X}{4}$-geometria con il parallelismo sestetto sopra un insieme X di cardinalità 24. Poiché il gruppo degli automorfismi di tale geometria è isomorfo al gruppo di Mathieu M_{24}, si ha il

Teorema 2. ([3], p.21)- *Il gruppo degli automorfismi di una* $\binom{X}{t}$-*geometrie con parallelismo soddisfacente la proprietà del parallelogramma è isomorfo ad* ASL(m,2) *oppure a* M_{24}.

3. Le colorazione del grafo completo con il minor numero di colori

Si dice grafo completo il grafo in cui ogni coppia di vertici è congiunta da uno spigolo. Se ad ogni spigolo di un grafo completo si dà un colore si ha una colorazione di spigoli. Ci limiteremo a considerare colorazioni del grafo completo su un numero n pari di vertici che usino n-1 colori e che abbiano la proprietà che mai due spigoli uscenti da uno stesso vertice sono equicolorati. Tali colorazioni di spigoli sono dette minime in quanto occorrono ad ogni modo almeno n-1 colori perché un grafo completo abbia una colorazione che goda della suddetta proprietà. Avvertiamo che nei lavori [6] e [9] si adopera il termine di uno-fattorizzazione anziché colorazione minima di spigoli, ma la differenza è formale. (cfr. [3], §IV p.63).

Un automorfismo di una colorazione di spigoli è una permutazione dei vertici che mandi spigoli equicolorati in spigoli equicolorati. Una colorazione minima di spigoli di un grafo completo è detta k-transitiva se ammette un gruppo di automorfismi che operi sui vertici come un gruppo di permutazioni k-volte transitivo.

Lo studio delle colorazioni minime di spigoli k-volte ($k\geq2$) transitive ha avuto inizio negli anni Settanta ad opera di Cameron ed è stato completato recentemente con l'uso della classificazione dei gruppi semplici finiti.

Teorema 3 ([4]) - *Classificazione completa delle colorazioni k-transitive ($k\geq2$) minime di spigoli del grafo completo su* n *vertici:*

1) una classe infinita di colorazioni 3-transitive minime di spigoli: $n=2^m$ $(m=1,2,\dots)$ *e il gruppo degli automorfismi è isomorfo ad* ASL(m,2).

2) cinque esempi di tipo sporadico:

n	k	*gruppo degli automorfismi*
4	4	S_4 ($\cong$PGL(2,4))
6	3	S_5 ($\cong$PGL(2,5))
8	2	PSL(2,7)
12	2	PSL(2,11)
28	2	PΓL(2,8)

Esistono invece per tutti i valori di n, delle colorazioni 1-transitive minime di spigoli del grafo completo su n vertici. In proposito, riportiamo due risultati su colorazioni cicliche (sono così chiamate le colorazioni dotate di un gruppo ciclico di automorfismi che opera sui vertici come un gruppo 1-transitivo di permutazioni.

Teorema 4. ([5]).- *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una colorazione ciclica minima del grafo completo su* n *vertici è che* n *sia una potenza di 2 ad esponente* ≥ 3.

Teorema 5. ([8]) - *Se il grafo completo su* n *vertici ammette una colorazione ciclica minima di spigoli tale che il relativo gruppo ciclico di automorfismi conservi un colore, allora* $n \not\equiv 0$ *(mod 8).*

4. I sistemi di terne di Steiner

Un sistema di Steiner S(t,k,v) consiste di un insieme non vuoto X di cardinalità v (i cui elementi saranno detti punti) e di una famiglia di parti di X, detti blocci, ciascuna di cardinalità t tale che k punti distinti appartengano ad uno e un sol blocco. Tale nozione risale al 1844 ed è una delle più antiche nel campo della Combinatoria. Studi approfonditi di natura gruppale sui sistemi di Steiner sono stati effettuati soprattutto negli anni 30; vale la pena di ricordare l'importante caratterizzazione dei gruppi di Mathieu come gruppi di automorfismi di certi sistemi di Steiner. In anni recenti, l'interesse è rivolto principalmente al caso t=3, k=2, cioè ai sistemi di terne di Steiner. Sono state date diverse caratterizzazioni degli spazi affini sopra GF(3) e quelli proiettivi sopra GF(2) in termini di sistemi di terne di Steiner. Ci limitiamo a riportare un risultato di rilievo che riposa sulla classificazione dei gruppi semplici.

Teorema 6. ([4], [6], [7]) - *Tutti e soli di sistemi di terne di Steiner 2-volte transitivi sono gli spazi affini sopra* GF(3) *e gli spazi proiettivi sopra* GF(2).

5. Gli insiemi di permutazioni strettamente transitivi

Come è noto, un gruppo $\mathcal{G}$ di permutazioni sopra un insieme finito X si dice k-volte transitivo se prese comunque due k-ple di elementi distinti di X, $(x_1,\dots,x_k)$, $(y_1,\dots,y_k)$, esiste un ele-

elementi distinti di X, $(x_1,\ldots,x_k)$, $(y_1,\ldots,y_k)$, esiste un elemento $g\in G$ tale che $g(x_i)=y_i$, $i=1,2,\ldots,k$. Nel caso in cui vi sia, per ogni due k-ple, un unico tale elemento g, il gruppo $\mathcal{G}$ si chiama gruppo di permutazioni strettamente k-transitivo su X.

Lo studio dei gruppi di permutazioni k-volte strettamente transitivi, già ampiamente svolto nell'ambito della teoria dei gruppi, è stato esteso, sin dagli anni Sessanta, al caso più generale degli insiemi di permutazioni, ossia al caso in cui $\mathcal{G}$ sia un insieme (non necessariamente un gruppo) di permutazioni su X. Gli insiemi di permutazioni k-volte transitivi corrispondono per $k=2$ ai piani affini e per $k=3$ ai piani di Minkowski. Se $\mathcal{G}$ è un gruppo, la struttura geometrica corrispondente è molto particolare: per $k=2$ la struttura delle coordinate è un quasicorpo associativo, per $k=3$ un piano affine derivato è un piano di Galois o di André. Inoltre, se $k\geq 4$ e il gruppo generato da $\mathcal{G}$ non contiene il gruppo alterno A_X su X, allora l'insieme $\mathcal{G}$ è necessariamente un laterale di un opportuno sottogruppo del gruppo simmetrico S_X su X; tale sottogruppo coincide allora con uno dei seguenti gruppi: S_X, A_X, il gruppo M_{11} di Mathieu ($k=4$, $|X|=11$), il gruppo M_{12} di Mathieu ($k=5$, $|X|=12$). Quest'ultimo risultato, dovuto a L.A. Rosati, è un corollario della classificazione dei gruppi semplici finiti e la non-esistenza di piani affini di ordine 21 o 22. Gli insiemi di permutazioni strettamente 1-transitivi costituiscono una famiglia molto vasta e con caratteri di estrema generalità. È possibile tuttavia conseguire risultati significativi su particolari insiemi di permutazioni strettamente 1-transitivi. Questo è il caso degli insiemi di permutazioni involutorie strettamente 1-transitivi con identità che chiameremo brevemente PIIST.

Definizione 3. - *Un insieme di permutazioni $(\mathcal{G},X)$ sopra un insieme X si dice un insieme PIIST se*

(2) $$g(g(x))=x, \text{ per ogni } x\in X \text{ e per ogni } g\in\mathcal{G};$$

(3) $$id_X \in \mathcal{G}.$$

Osserviamo che ogni 2-gruppo abeliano elementare, riguardato nella sua rappresentazione Cayleiana, risulta essere un insieme PIIST.

Analogamente al caso dei gruppi di permutazioni, due insiemi PIIST $(X_1, \mathcal{G}_1)$ e $(X_2, \mathcal{G}_2)$ si dicono simili se vi sono due biiezioni α $(X_1 \to X_2)$ e β $(\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2)$ tali che $\alpha(g_1(x_1)) = (\beta g_1)(\alpha(x_1))$, per ogni $x_1 \in X_1$ e $g_1 \in \mathcal{G}_1$. Due insiemi PIIST si dicono isomorfi se hanno lo stesso insieme sostegno e sono simili. In altri termini, si pone $(X, \mathcal{G}_1) \cong (X, \mathcal{G}_2)$ se sussite $\alpha^{\,1}\mathcal{G}_1\alpha = \mathcal{G}_2$ per una opportuna permutazione α su X. Dato un insieme PIIST $(X, \mathcal{G})$, un automorfismo è una permutazione γ su X tale che $\gamma^{\,1}\mathcal{G}\gamma = \mathcal{G}$; gli automorfismi costituiscono un gruppo di permutazioni su X che coincide ovviamente con il normalizzante $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ di $\mathcal{G}$ in S_X. Osserviamo che se un insieme PIIST è un gruppo (e in tal caso necessariamente abeliano elementare di ordine $n = 2^m$ con $|X| = n$), il gruppo degli automorfismi è isomorfo ad ASL(m,2) ed opera su X allo stesso modo di ASL(m,2) nello spazio affine di dimensione m sopra GF(2).

È facile vedere che se n=2 o n=4, gli insiemi PIIST su n oggetti sono fra loro isomorfi. Questo vale ancora per n=6, ma non per $n \geq 8$. In [11] si dà una classificazione completa degli insiemi PIIST su 8 oggetti: Vi sono esattamente sei classi di isomorfismo, ciascuna è caratterizzata dal suo gruppo di automorfismi. Ci limitiamo a riportare gli ordini dei rispettivi gruppi: 1344, 96, 64, 42, 24, 16.

6. Equivalenze fra casi particolari delle strutture geometriche precedentemente considerate

Le strutture geometriche su cui ci siamo soffermati sono collocate in aree diverse nell'ambito della Combinatoria. Fra esse esistono tuttavia significativi legami, il più notevole è l'equivalenza della nozione di colorazione minima di spigoli del grafo completo su n vertici con ciascuna delle seguenti nozioni:

$\binom{X}{2}$*-geometria con parallelismo.* Dato un insieme X, è chiaro che la sola differenza tra la $\binom{X}{2}$-geometria e il grafc completo i cui vertici sono gli elementi di X consiste nel chiamare i 2-sottoinsiemi di X col nome di spigoli. In particolare, 2-sottoinsiemi paralleli e spigoli equicolorati hanno lo stesso significato. Vi è pertanto una corrispondenza intrinseca fra le colorazioni minime di spigoli di un grafo completo e le $\binom{X}{2}$-geometrie con parallelismo sopra l'insieme X dei vertici del grafo. Si vede anche che i rispettivi gruppi di automorfismi coincidono.

3-rete involutoria con identità. Fissato un vertice *e*, ad ogni colorazione minima di spigoli resta associato un cappio commutativo $(X,\cdot)$ di esponente 2, se si introduce la seguente operazione "$\cdot$" sull'insieme sostegno X formato dai vertici:

(1) *per ogni* $a \in X$, $a\cdot a=e$;

(2) *per ogni* $a \in X - \{e\}$, $a\cdot e=a=e\cdot a$;

(3) *per ogni due* $a,b \in X - \{e\}$ *distinti*, $a\cdot b=c$ *se gli spigoli* $\{e,c\}$ *e* $\{a,b\}$ *sono equicolorati.*

Viceversa, ogni cappio commutativo $(X,\cdot)$ di esponente 2 dà luogo ad una colorazione minima di spigoli del grafo completo i cui vertici sono gli elementi di X. Poiché ogni 3-rete involutoria con identità è coordinatizzabile mediante un cappio commutativo di esponente 2, vi è una corrispondenza fra le colorazioni minime di spigoli del grafo completo su n vertici e le 3-reti involutorie con identità di ordine n. Mediante tale corrispondenza, è possibile definire un isomorfismo fra il gruppo Γ degli automorfismi della colorazione e il gruppo quoziente G/T dove G è il gruppo delle collineazioni della 3-rete che conservano le direzioni e mutano in sé una la retta e_t trasversale, e T è il sottogruppo costituito delle collineazioni che fissano ogni punto di e_t. Inoltre, Γ opera sui vertici del grafo allo stesso modo di G/T sui punti di e_t.

Insieme PIIST. Ad ogni colore di una colorazione minima di spigoli del grafo completo si può associare una permutazione involutoria sull'insieme dei vertici X nel modo seguente: Se $\{x_1,y_1\}$

sono gli $(n-1)/2$ spigoli di tale colore, le trasposizioni $(x_i y_i)$ sono disgiunte, quindi il loro prodotto è una permutazione involutoria su X. Gli n-1 colori danno così luogo ad altrettante permutazioni involutorie le quali con l'aggiunta dell'identità di X costituiscono un insieme PIIST. Questo ragionamento si inverte, sicché vi è una corrispondenza biunivoca fra le colorazioni minime di spigoli del grafo completo su n vertici e gli insiemi PIIST di ordine n. In quest'ordine di idee si vede anche l'isomorfismo fra i rispettivi gruppi di automorfismi.

Conviene notare infine che certe colorazioni minime di spigoli del grafo completo corrispondono *ai sistemi di terne di Steiner*. Più precisamente, se il cappio associato è totalmente simmetrico, vale a dire

(4) *per ogni* $a,b \in X$, $a\cdot(a\cdot b)=b$,

si ottiene un sistema di terne si Steiner considerando come punti i vertici distinti da e e come rette le terne $\{a,b,a\cdot b\}$ di vertici per ogni $a\neq b$ e $a\neq e\neq b$. Viceversa, ad ogni sistema di terne di Steiner si può associare un cappio commutativo totalmente simmetrico di esponente 2, quindi una particolare colorazione minima di spigoli di un grafo completo. Il gruppo degli automorfismi di una colorazione siffatta che fissano il vertice e, risulta isomorfo al gruppo degli automorfismi del corrispondente sistema di terne di Steiner.

In forza dei legami ora illustrati, i teoremi precedentemente riportati restano validi e potranno essere riformulati in ciascuna delle strutture equivalenti. Ci limitiamo ad enuniciare il Teorema 3 in termini di 3-reti e di insiemi PIIST:

Teorema 7. *Classificazione completa delle 3-reti involutorie con identità dotate di un gruppo* Γ *di automorfismi soddisfacente alle seguenti condizioni:*

(5) Γ *conserva le direzioni,*

(6) *Γ muta in sé una retta trasversale e operi sui punti di essa come un gruppo di permutazioni 2-volte transitivo.*

i) *la classe infinita delle 3-reti involutorie classiche con identità,*

ii) *tre 3-reti involutorie con identità di ordine rispettivamente 6, 12 e 28.*

Teorema 8. *Classificazione completa degli insiemi PIIST ($\mathcal{G}$,X) tali che il normalizzatore di $\mathcal{G}$ nel gruppo simmetrico su X sia doppiamente transitivo su X.*

i) *la classe infinita dei gruppi PIIST (ossia i 2-gruppi abeliano elementari);*

ii) *tre insiemi PIIST di ordine rispettivamente 6, 12 e 28.*

In [2] è stato compiuto il primo importante passo in direzione della classificazione di tutte le 3-reti che godano delle condizioni poste nel Teorema 7. In proposito, si è rivelato molto ultile introdurre la nozione di 3-*rete irriducibile rispetto alle proprietà* (5) *e* (6). Si richiede che la 3-rete non contenga delle sotto 3-reti proprie (con eccezione al più delle 3-reti di ordine 2) dotate della stesse proprietà gruppali, nel senso che il sottogruppo Σ di Γ che muta in sé una sotto 3-rete di ordine >2 non sia doppiamente transitivo sui punti della retta trasversale situati su tale sotto 3-rete.

Teorema 9. ([2] Proposition 1.1) *Classificazione completa delle 3-reti irriducibili rispetto alle proprietà* (5) *e* (6):

i) *la classe delle 3-reti classiche coordinatizzate con gruppi di ordine primo dispari;*

ii) *tre 3-reti di ordine rispettivamente 4, 6 e 12.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Barlotti and K. Strambach, The Geometry of Binary Systems, *Advances in Mathematics* **43** (1983), 1-105.

[2] A. Bonisoli, On 2-Transitive 3-Nets, *Journal of Geometry*, **41** (1991), 42-57.

[3] P.J. Cameron, *Parallelisms of Complete Desings*, London Math. Society Lecture Note Series 23, Cambridge University Press (1976).

[4] P.J. Cameron and G. Korchmáros, One-factorization of complete graphs with a doubly transitive automorphism group, *Bulletin of the London Mathematical Society, in corso di pubblicazione*.

[5] M. Hall, Steiner triple systems with a doubly transitive automorphism group, *Journal of Combinatorial Theory* **A38** (1985), 192-202.

[6] A. Hartman and A. Rosa, Cyclic one-factorizations of the complete graph, *European Journal of Combinatorial Theory* **6** (1985), 45-49.

[7] W.M. Kantor, Homogeneous designs and geometric lattices, *Journal of Combinatorial Theory* **A38** (1985), 66-74.

[8] J.D. Key - E.E. Shult, Steiner triple systems with doubly transitive automorphism group: A corollary to the classification for finite simple groups *Journal of Combinatorial Theory* **A36** (1984), 105-110.

[9] G. Korchmáros, Cyclic one-factorizations with an invariant one-factor of the complete graph, *Ars Combinatoria* **27** (1989), 133-138.

[10] G. Korchmáros and D. Saeli, Commutative loops of exponent 2 and involutorial 3-nets with identity, *Geometriae Dedicata* **28** (1988), 259-276.

[11] D. Saeli, Sugli insiemi di permutazioni involutorie con identità strettamente transitivi e i loro gruppi di automorfismi, preserving an oval of a finite projective plane, in Combinatorics'88 (Proc. International Conference on Incidence Geometries and Combinatorial Structures, Ravello 23-28 May 1988) vol. II pp. 391-411 (1991).

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del GNSAGA.

Indirizzo dell'autore:

Università degli Studi della Basilicata
Dopartimento di Matematica
via Nazario Sauro 85
85100 POTENZA