Ratio Math. 3
(1992), 15 - 34

CRITERI DI PROGRAMMAZIONE DELLE ISPEZIONI SULLE COSTRUZIONI ESISTENTI E DI INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI SPERIMENTALI

ing. Marcello Ciampoli(*)

SOMMARIO: L'affidabilità di una costruzione può essere controllata ed a limite incrementata predisponendo un programma di manutenzione, consistente in ispezioni e riparazioni o sostituzioni. Poiché lo svolgimento di tale programma comporta un onere economico spesso rilevante, l'obiettivo della sua pianificazione deve essere quello di specificare una strategia di ispezione e riparazione che risulti ottimale ai fini della minimizzazione dei costi associati all'esercizio della costruzione. Nell'articolo sono trattati alcuni aspetti di questa problematica, con l'intento di fornire un contributo allo sviluppo di una metodologia integrata, di tipo probabilistico e statistico, che permetta di programmare fin dall'inizio le ispezioni sulle costruzioni, alla luce dei possibili interventi su di esse, ed al tempo stesso si avvalga di tecniche efficienti per interpretare i risultati delle indagini eseguite. In merito a questo secondo aspetto, sono affrontati alcuni problemi specifici che intervengono nella valutazione della sicurezza delle costruzioni esistenti, ed in particolare nella caratterizzazione del livello di incertezza e di aleatorietà associato alle variabili di base. Tra essi: la scelta delle distribuzioni di probabilità più idonee; la determinazione dei frattili inferiori delle resistenze dei materiali sulla base di un numero limitato di risultati sperimentali; la definizione della legge di distribuzione di una grandezza derivata, misurata attraverso prove sperimentali ed espressa analiticamente in funzione di più variabili di base. Tali operazioni rappresentano infatti il presupposto essenziale per l'applicazione corretta delle tecniche di analisi probabilistica della sicurezza strutturale.

(*) Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica - Università di Roma 'La Sapienza'

INTRODUZIONE

Il livello di sicurezza di una costruzione non viene giudicato solo in fase di progetto, ma anche in diverse occasioni che si presentano durante l'esecuzione o l'esercizio: ad esempio, a seguito di ispezioni, sia periodiche che rese necessarie dalla presenza di dissesti, all'atto della progettazione di interventi di riparazione o adeguamento e nel caso di una variazione della destinazione d'uso.

In tali circostanze, la situazione attuale della costruzione può risultare sensibilmente diversa da quella ipotizzata all'atto del progetto; e ciò anche sotto l'aspetto della definizione dei requisiti prestazionali, dei parametri di giudizio e dei criteri di accettazione o rifiuto.

Infatti, le conseguenze economiche della scelta di livelli di sicurezza ottimali, a cui fare riferimento nella verifica dell'affidabilità strutturale, sono completamente differenti nei due casi di costruzione ancora da realizzare o già realizzata, perché, mentre nella fase iniziale di progetto è possibile apportare le necessarie variazioni in modo relativamente agevole, incrementare la resistenza di una costruzione esistente può risultare, se pure tecnicamente possibile, molto oneroso e quindi antieconomico.

Per una costruzione già esistente, tuttavia, sono disponibili (o possono essere resi tali) molti più dati rispetto alla fase di progetto: dati relativi alle caratteristiche dei materiali, alle dimensioni ed allo stato di degrado degli elementi strutturali ed alla storia di carico effettiva.

L'interpretazione di tali informazioni non è però del tutto semplice, soprattutto se esse derivano da fonti diverse o conducono a risultati contrastanti: al di là della possibilità di trarre alcune indicazioni di natura qualitativa, il processo di interpretazione deve essere quindi fondato sull'impiego consapevole di tecniche di elaborazione statistica che tengano conto della effettiva consistenza e della significatività del campione.

Queste brevi considerazioni pongono in evidenza alcuni dei complessi e delicati problemi che sorgono nella valutazione della sicurezza di una costruzione esistente e nella programmazione degli interventi su di essa.

Nel presente lavoro sono trattati diversi aspetti di questa tematica, con l'intento di fornire un contributo allo sviluppo di una metodologia integrata, di tipo probabilistico e statistico, che permetta di programmare fin dall'inizio le ispezioni sulle costruzioni, alla luce dei possibili interventi su di esse, ed al tempo stesso si avvalga di tecniche efficienti per interpretare correttamente i risultati delle indagini eseguite; metodologia che dovrebbe rappresentare lo strumento per una progettazione unitaria, che a partire dalla concezione dell'opera ne segua l'evoluzione per tutta la durata della vita utile, definendo una sorta di manuale per l'uso, relativo all'analisi del degrado ed alla manutenzione.

È appena il caso di rilevare che la teoria che permette di elaborare una stima consistente della sicurezza strutturale in funzione del livello di conoscenza effettivo dello stato della costruzione (di volta in volta aggiornato attraverso le informazioni addizionali derivanti ad esempio da indagini in sito) è basata sull'applicazione dei principi dell'inferenza bayesiana, accoppiati alle tecniche di valutazione probabilistica dell'affidabilità, come già illustrato in diversi lavori [1], [2],[3],[4],[5].

A tali tecniche non si farà esplicitamente cenno nel seguito, se non in qualche caso, anche se risulterà evidente come il loro impiego sia indispensabile per la programmazione delle ispezioni, e come i metodi di elaborazione statistica dei risultati sperimentali forniscano il necessario supporto ad una corretta applicazione di esse.

PROGRAMMAZIONE DELLE ISPEZIONI SULLE COSTRUZIONI

L'affidabilità di un sistema strutturale può essere controllata e, se necessario, incrementata con un programma di manutenzione consistente in ispezioni periodiche e riparazioni o sostituzioni.

Tale programma è evidentemente costoso: l'obiettivo della sua pianificazione deve essere pertanto quello di specificare una strategia di ispezione e riparazione che risulti ottimale ai fini della minimizzazione dei costi associati all'esercizio della costruzione.

Un programma di ispezioni è definito attraverso:
- la probabilità di ottenere successi, ovvero di ricavare informazioni significative, con un particolare tipo di ispezione;
- il numero e l'intervallo di tempo tra le ispezioni;
- la qualità del componente dopo l'eventuale riparazione.

L'obiettivo fondamentale di un'ispezione è infatti quello di analizzare le condizioni della costruzione sotto un certo numero di aspetti significativi, in modo che, elaborando i risultati ottenuti, sia possibile: aggiornare il livello di conoscenza dello stato attuale della costruzione e quindi dell'evoluzione subita dai fenomeni di degrado; fornire un supporto alle decisioni in merito alla conservazione, alla riparazione, all'adeguamento o alla limitazione della funzionalità; in caso di conformità, limitarsi a stabilire l'opportunità di una nuova ispezione ed a fissarne i tempi di esecuzione.

Gli aspetti che devono essere esaminati dipendono da diversi fattori. Con riferimento a titolo d'esempio al caso della verifica di resistenza di un sistema strutturale, sono da citare: i potenziali meccanismi di collasso e la dipendenza dal tempo di essi; i livelli di danno considerati critici per gli elementi strutturali; le diverse fonti di incertezza associate sia alla modellazione del comportamento del sistema che alla valutazione della capacità portante degli elementi ed alla quantificazione degli errori di misura o commessi dagli operatori durante lo svolgimento delle indagini e l'interpretazione dei risultati; la storia degli interventi già realizzati sulla costruzione; i fondi messi a disposizione.

L'estensione dell'ispezione dipende dalle informazioni che sono disponibili preliminarmente, ovvero dai dati reperibili riguardo al progetto, alla costruzione, al collaudo e ricavati dalle indagini condotte in precedenza. Soprattutto negli edifici molto antichi, tali informazioni 'a priori' possono essere state completamente perse ed il programma d'indagine di conseguenza deve risultare sufficientemente esteso. Al contrario, nel caso siano disponibili molte informazioni, l'indagine può assumere il carattere di una semplice verifica.

In entrambi i casi il programma di ispezione deve essere definito in modo che il costo di esso sia giustificato dalla significatività delle informazioni ottenute e bilanciato dal valore residuo della costruzione.

Ancora solo da un punto di vista qualitativo, nel caso in cui il meccanismo di danneggiamento di un componente strutturale e la sua evoluzione temporale siano noti (ad esempio in funzione della frequenza di applicazione del carico), sarà possibile definire il tempo in cui si realizzerà la prima ispezione o la durata dell'intervallo tra due ispezioni successive proprio in base al modello di propagazione del danno e quindi valutando gli stati in cui la funzionalità dell'elemento risulti ridotta ad un livello critico. La durata dell'intervallo d'ispezione dipenderà infatti: dallo stato iniziale di danno del componente, ovvero dalla sua condizione all'inizio del programma d'ispezione, dalla sua capacità resistente e dal modo in cui essa degrada; dal modello di danno assunto, che deve essere necessariamente stocastico per tener conto delle diverse cause di aleatorietà ed incertezza; dal livello di soglia in corrispondenza del quale il danno accumulato è considerato critico; dai fattori ambientali o prestazionali che ne influenzano la propagazione.

Il superamento di un livello di soglia del danneggiamento subito da un elemento può essere descritto solo attraverso una funzione di probabilità: la programmazione delle ispezioni richiede pertanto una procedura combinata, probabilistica e di ottimizzazione dei tempi di ispezione, in funzione dell'estensione dei danni e dei livelli di soglia al di sopra dei quali si ritiene necessaria la riparazione.

Poiché almeno nei casi correnti la funzione obiettivo consiste nella minimizzazione del costo totale atteso, la scelta di eseguire un programma di ispezioni deve essere comunque confrontata con le alternative:
- nessuna ispezione e nessuna manutenzione;
- nessuna ispezione e nessuna manutenzione ad intervalli fissi;
- sostituzione senza ispezione.

La possibilità di eseguire tali valutazioni economiche decade nel caso degli edifici di interesse storico-monumentale, la cui conservazione è comunque motivata da considerazioni legate a valori non monetizzabili. La trattazione che segue si limita pertanto ad esaminare il caso in cui al collasso del sistema sia comunque associabile una valutazione economica.

OTTIMIZZAZIONE DEI TEMPI D'ISPEZIONE

Questo problema, al di fuori di un'impostazione probabilistica, ha avuto finora soltanto soluzioni empiriche, legate alla considerazione che l'ispezione se troppo prematura fornisce informazioni prive di significato, non essendosi ancora potuto sviluppare alcun danno significativo, se tardiva può vanificare l'opportunità di un intervento di riparazione, essendo troppo grave l'entità del danno cumulato.

Una possibile procedura probabilistica per l'ottimizzazione dei tempi d'indagine su una costruzione, con riferimento ad una assegnata durata della vita utile T, è quella illustrata nel seguito [6].

Per semplicità di esposizione, viene considerato il caso di un solo componente strutturale, per il quale si ipotizza che l'eventuale intervento di riparazione sia in grado di ripristinare completamente (cioè i livelli originari) l'integrità e la capacità portante e che i tempi dedicati all'ispezione ed alla riparazione siano trascurabili rispetto al periodo di vita utile previsto [0,T].

La definizione dei tempi di ispezione ottimali viene svolta con l'obiettivo di minimizzare il costo totale atteso, che risulta composto, oltre che dall'investimento iniziale, dai costi associati al collasso dell'opera (C_C), all'indagine (C_i) ed alla eventuale riparazione (C_r). Ciascun termine del costo totale è a sua volta funzione del tempo; la relativa capitalizzazione richiede considerazioni di una certa complessità e pertanto può essere in prima istanza trascurata o eseguita in termini semplificati, assumento ad esempio che il tasso d'inflazione annuo sia costante.

Sia quindi t_i l'istante ($\in$ [0,T]) in cui si prevede di effettuare l'indagine sulla costruzione e che rappresenta quindi l'incognita del problema. Tale indagine ha evidentemente significato solo se il componente considerato non risulta ancora collassato all'istante t_i.

Sia poi $P_f'(t_i)$ la probabilità di collasso dell'elemento all'istante t_i, valutata con riferimento ad un determinato stato limite: $[1-P_f'(t_i)]$ è di conseguenza la probabilità di eseguire l'ispezione.

Nello spirito dell'inferenza bayesiana e con le tecniche illustrate in [1], [2], [3], [4] e [5], è possibile tener conto dei risultati delle indagini svolte durante l'ispezione per aggiornare la stima iniziale ('a priori') della probabilità di collasso $P_f'(t_i)$ dell'elemento, e quindi per ricavare l'espressione 'a posteriori' della probabilità di collasso residua: $P_f''(T-t_i)$.

Evidentemente, nella fase di programmazione delle ispezioni sulle costruzioni, non sono noti i risultati delle indagini: essi pertanto devono essere caratterizzati attraverso distribuzioni di probabilità assegnate a priori, derivate ad esempio sulla base di informazioni di natura qualitativa o dell'effettivo rilievo del comportamento nel tempo di costruzioni simili a quella in esame.

L'obiettivo dell'ispezione è quello di fornire un supporto ad una decisione in merito all'attuazione dell'intervento di riparazione, che si renderà necessario nel caso che un efficiente indicatore dello stato di danno del componente abbia superato un valore considerato critico. Il criterio su cui si basa tale decisione è quindi collegato all'aumento della sicurezza residua della costruzione che si ottiene con la riparazione.

Sia quindi $P_r(t_i)$ la probabilità (ancora stimata a priori) che l'indicatore di danno abbia superato il valore di soglia all'istante t_i. Evidentemente dovrà essere: $P_r(t_i) \geq P_f'(t_i)$.

Sia poi: $P_f'''(T-t_i)$ la probabilità di collasso residua del componente dopo che è stato completato l'intervento di riparazione: l'espressione di tale funzione viene ricavata aggiornando la stima iniziale della probabilità di collasso. Nella valutazione di essa, occorre tener conto delle incertezze associate all'esecuzione dell'intervento di riparazione: nel caso in esame, per l'ipotesi fatta in merito all'efficacia della riparazione (ovvero di completo ripristino della capacità

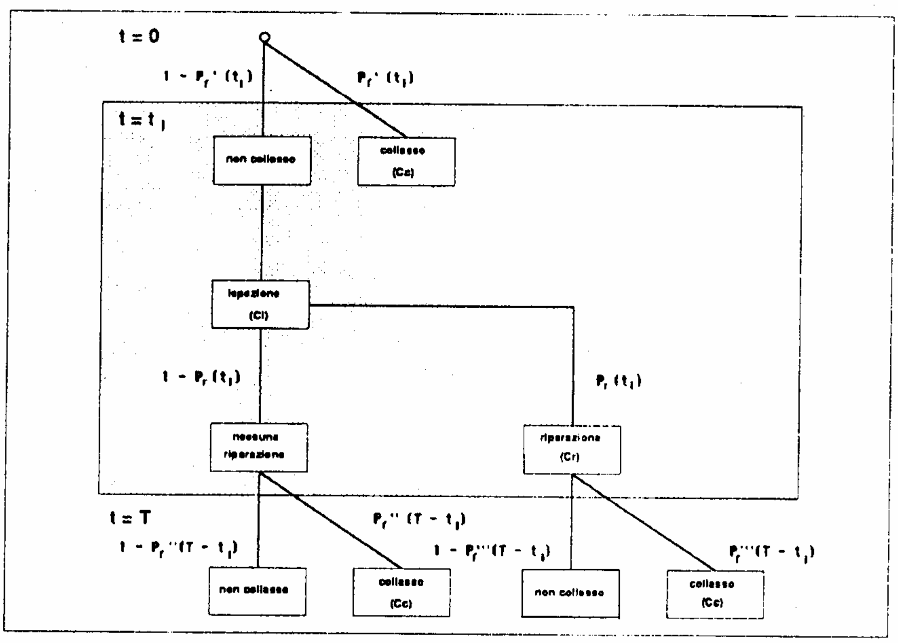

Fig. 1 - Ricerca del tempo d'ispezione: albero degli eventi (da [6])

resistente e dell'integrità dell'elemento), risulterà che la funzione $P_f'''(\cdot)$ ha la stessa espressione della $P_f'(\cdot)$. La funzione $P_f''(\cdot)$ si ricava invece dall'espressione della $P_f'(\cdot)$, ma condizionata al verificarsi dell'evento 'non collasso' del componente fino all'istante t_i: tale evento sarà caratterizzato dalla probabilità, definita a priori, che l'indicatore del danno non abbia superato il livello di soglia.

Con riferimento allo schema di fig. 1, in cui sono distinti tutti gli eventi analizzati, che risultano mutuamente esclusivi, il costo totale atteso dell'operazione è pari a:

$$\begin{aligned} C(t_i,T) = \; & P_f'(t_i)\cdot C_c+[1-P_f'(t_i)]\cdot \\ & \{C_i+P_r(t_i)\cdot[C_r+P_f'''(T-t_i)\cdot C_c] \\ & +[1-P_r(t_i)]\cdot P_f''(T-t_i)\cdot C_c\} \end{aligned} \qquad (1)$$

Poiché le espressioni di $P_f'(t_i)$ e $P_r(t_i)$ sono funzioni crescenti di t_i, mentre quelle di $P_f''(T-t_i)$ e $P_f'''(T-t_i)$ sono funzioni decrescenti di t_i, esisterà sicuramente un valore di t_i in corrispondenza del quale il costo totale atteso ha un minimo.

Riguardo ai vincoli da porre alla procedura di ottimizzazione, è evidente intanto che il costo totale atteso dovrà risultare in ogni caso inferiore al costo associato al collasso senza ispezione [pari a $P_f'(T)\cdot C_c$] ed al costo di demolizione e sostituzione senza ispezione. Inoltre si potrà imporre che la probabilità di collasso dell'elemento non risulti mai superiore ad un valore di soglia: $[P_f'(t_i) \leq P_{f,\,target}(t_i)]$, rendendosi in caso contrario comunque necessaria l'ispezione.

Questo tipo di analisi, che nell'inferenza bayesiana assume la denominazione di 'pre-posterior', viene svolto contestualmente alla progettazione dell'opera e permette di determinare il tempo ottimale della prima ispezione sulla costruzione.

In definitiva essa si articola nelle seguenti operazioni:
- definizione di un modello di danno per il componente strutturale e della sua evoluzione nel tempo;
- costruzione della funzione che descrive la variazione nel tempo della probabilità che il danno superi un livello di soglia considerato critico;
- caratterizzazione probabilistica dei possibili risultati di una ispezione;
- valutazione della probabilità di eseguire la riparazione, sulla base del criterio decisionale assunto;
- aggiornamento delle espressioni delle probabilità di collasso con e senza riparazione.

La stessa procedura può essere impiegata per analizzare la condizione effettiva di una costruzione esistente e quindi per valutare l'intervallo tra due successive ispezioni; in tale caso si assumono come dati di partenza ('a priori') quelli derivati attraverso l'esame dei risultati della prima ispezione.

SCELTA DELLE TECNICHE DI INDAGINE E DELLE DIMENSIONI DEL CAMPIONE

Nella pianificazione del programma di indagini su una costruzione deve essere chiaramente specificato l'obiettivo di esse, essendo differenti le tecniche disponibili per definire le caratteristiche di resistenza o durabilità e più in generale per la verifica della rispondenza alle prescrizioni normative o di progetto.

I criteri di definizione del numero di prove da eseguire (o di campioni da prelevare) dipendono, oltre che dalla disponibilità economica, dalla entità del grado di dissesto osservabile o della non conformità alle specifiche di progetto, e dalla accessibilità degli elementi.

Solo per indagini di routine ed in presenza di danni limitati, si potrà ritenere che i margini di sicurezza adottati nella successiva verifica di sicurezza siano sufficienti a coprire alcuni errori commessi nel campionamento.

Tralasciando i problemi connessi alla verifica della possibilità di combinare i risultati di esperienze eseguite su campioni di popolazioni differenti, uno degli aspetti che richiede qualche considerazione consiste quindi nello stabilire il numero ottimale di prove da eseguire.

Tale valore può essere ricavato imponendo che sia sufficientemente elevata la probabilità che la varianza effettiva della variabile aleatoria in esame sia inferiore ad un valore assegnato. Tale operazione richiede la definizione degli intervalli di confidenza della varianza della variabile campionata, o almeno del limite superiore di essi.

Si ipotizzi quindi di eseguire una serie di misure di una variabile X, di valore medio μ e deviazione standard σ. Siano: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i risultati delle misure sperimentali e:

$$x^* = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} \tag{2}$$

$$s^2 = \sqrt{\frac{(\Sigma_i (x_i - x^*)^2}{n-1}} \tag{3}$$

gli estimatori non distorti di μ e σ.

Si dimostra che, se X è una variabile gaussiana, la variabile:

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1}$$

ha una distribuzione di tipo chi-quadrato a (n-1) gradi di libertà.

Il numero n di prove da eseguire dovrà pertanto risultare tale che sia verificata la disuguaglianza:

$$P\left\{\sigma^2(X) < (n-1)\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right\} = \alpha \qquad (4)$$

dove: $\sigma^2(X)$ è un valore adeguatamente limitato, ad esempio tale che il coefficiente di variazione di X sia inferiore al 10%;
α è un valore di probabilità assegnato;
$\chi^2_{n-1,\alpha}$ è tale che: $P\{\chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\alpha}\} = \alpha$.

Nel caso in cui invece siano già disponibili i risultati di una serie di prove che forniscano una stima del valore medio della variabile e della precisione con cui tale parametro è definito, è possibile stabilire la relazione tra il numero di prove già eseguite e quelle da eseguire con un'altra tecnica di prova (ad esempio di più semplice esecuzione), imponendo che per entrambe il valore medio della variabile sia definito con la stessa precisione. In questo caso occorre analizzare gli intervalli di confidenza del valore medio. I relativi limiti sono espressi dalla relazione:

$$E[X] \pm \frac{s}{\sqrt{n-1}}t \qquad (5)$$

essendo t la variabile di Student, il cui valore dipende dal livello di confidenza considerato e dall'ampiezza del campione.

Se ad esempio si vuole stimare la media al livello di confidenza del 95%, occorre fare riferimento ai valori di t che rappresentano il frattile al 97,5%. Questi valori dipendono dal numero dei gradi di libertà, ma risultano però poco variabili con esso (per: n = 10, t = 2.26; per: n = 120: t = 1.98).

Indicando con gli indici 1 e 2 le due tecniche di prova a confronto, si ricava di conseguenza in modo approssimato che:

$$\frac{s_1}{\sqrt{n_1-1}} = \frac{s_2}{\sqrt{n_2-1}} \qquad (6)$$

e quindi:

$$\sqrt{n_1-1} = \frac{s_1}{s_2}\sqrt{n_2-1} \qquad (7)$$

Tale relazione permette di ricavare il valore del numero n_1 di prove da eseguire con la tecnica 1 purché si conoscano, anche attraverso esperienze condotte in occasioni diverse, i valori di s_1 e s_2.

In via più generale, ed in linea con le indicazioni del paragrafo precedente, è possibile applicare un'analisi bayesiana di tipo 'pre-posterior' anche alla determinazione delle dimensioni ottimali del campione statistico. Infatti, poiché è evidente che l'accuratezza della stima dei parametri di una variabile aleatoria aumenta con il numero di prove eseguite, ma contemporaneamente aumentano i costi (C_i) associati all'ispezione, la dimensione ottimale del campione risulterà da un bilanciamento tra la precisione ottenuta ed il costo delle prove. Sviluppando quindi alcune considerazioni riportate in [7], si dimostra che, per una popolazione gaussiana, la dimensione ottimale del campione è espressa attraverso la relazione:

$$n_{opt} = \sigma\left(\sqrt{\frac{c}{k}} - \frac{\sigma}{\sigma'^2}\right) \tag{8}$$

essendo: σ lo scarto quadratico medio dell'errore di misura; c la stima del costo associato ad un errore unitario nella valutazione del valore medio della variabile; k il costo di una prova; σ'^2 la deviazione standard stimata 'a priori' del valore medio della variabile in esame. Evidentemente, se:

$$\sqrt{\frac{c}{k}} < \frac{\sigma}{\sigma'^2}$$

non dovrà essere eseguita nessuna misura e ci si potrà basare sulle valutazioni effettuate 'a priori'.

PROBLEMI SPECIFICI CONNESSI ALL'INTERPRETAZIONE DI RISULTATI SPERIMENTALI

Nel seguito vengono esaminati alcuni problemi relativi alla interpretazione dei risultati di una ispezione, ed in particolare alla definizione della distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria, sia essa di base, che derivata attraverso una relazione teorica (di cui si voglia al tempo stesso esaminare l'attendibilità), o alla valutazione di un valore della variabile caratterizzato da una assegnata probabilità di realizzarsi. Tali funzioni di distribuzione possono essere impiegate per l'aggiornamento con tecniche bayesiane di funzioni di distribuzione assegnate a priori.

SCELTA DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE CAMPIONATA

La scelta della funzione di distribuzione da attribuire ad una variabile aleatoria sulla base dei risultati di un campionamento statistico rappresenta un problema delicato, che richiede la costruzione di un test di verifica e la definizione di un criterio di decisione in base al quale sia possibile rifiutare o accettare l'ipotesi secondo cui gli n valori osservati costituiscono un campione della funzione di distribuzione ipotizzata a priori.

In alternativa, tale obiettivo può essere raggiunto adottando il metodo della retta di Henry o eseguendo il test di chi-quadrato, proposto da Karl-Pearson nel 1900, o il test di Kolmogorov-Smirnov.

Il primo consiste in un procedimento grafico, che permette di verificare se il campione deriva da una distribuzione normale (o log-normale) ed in caso positivo di stimare i parametri di tale distribuzione. Il suo impiego è basato sulla osservzione che l'ipotesi di normalità (o log-normalità) è verificata se il diagramma che si costruisce riportando in ascissa i valori della variabile ed in ordinata, in scala normale (o log-normale), le frequenze cumulate risulta approssimativamente una retta; se tale condizione è soddisfatta, è immediato derivare il valore medio e la deviazione standard di tale distribuzione.

Il test di chi-quadrato si applica ancora per la verifica dell'ipotesi di normalità e consiste nel suddividere il dominio di definizione della variabile in p classi disgiunte, di cui sia possibile valutare le frequenze relative, e nel valutare la 'distanza' tra la densità multinomiale teorica e quella empirica che risulta dal campionamento. Senza entrare nel dettaglio della formulazione analitica, peraltro molto semplice, è sufficiente osservare che, se è limitata la probabilità che il quadrato di tale distanza, che ha una distribuzione chi-quadrato, sia inferiore ad un valore assegnato, la distribuzione empirica è molto prossima a quella reale, e risulta quindi verificata l'ipotesi di normalità.

Il test di Kolmogorov-Smirnov consiste invece nel valutare lo scarto massimo tra la funzione di ripartizione empirica e quella teorica; l'ipotesi relativa alla scelta della distribuzione risulta al solito verificata se la probabilità che lo scarto massimo sia inferiore ad un valore assegnato è maggiore di un livello di soglia ritenuto accettabile. Per l'applicazione di questo test a svariati tipi di distribuzione teorica sono disponibili diversi programmi di libreria.

CONFRONTO TRA I RISULTATI DI UNA PROVA SPERIMENTALE ED I VALORI RISULTANTI DA UN MODELLO ANALITICO

Il problema delineato si complica nel caso in cui la grandezza in esame, misurata direttamente, venga espressa anche attraverso una relazione analitica in funzione di un certo numero di variabili di base, variabili in parte misurate anch'esse direttamente ed in parte solo stimate a partire da valori nominali.

È questo il caso ad esempio delle deformazioni di una trave, rilevate attraverso una prova di carico, ed anche della resistenza del calcestruzzo, ricavata da prove di schiacciamento eseguite su campioni del materiale e controllata attraverso le formule di correlazione che utilizzano i risultati della prove non distrittive eseguite con lo sclerometro e con la tecnica degli ultrasuoni.

Per semplicità di esposizione, si ipotizzi quindi che una variabile aleatoria, ad esempio la resistenza teorica di un elemento strutturale, sia esprimibile come il prodotto di p variabili di base (che rappresentino le caratteristiche meccaniche e geometriche dell'elemento o grandezze quali l'indice di rimbalzo dello sclerometro o la velocità di propagazione degli ultrasuoni), attraverso una relazione del tipo:

$$R_t = X_1^{\alpha_1} \cdot X_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot X_p^{\alpha_p} \tag{9}$$

essendo α_1, α_2, $\ldots\alpha_p$ esponenti reali.

Per tener conto del grado di approssimazione connesso all'impiego della relazione analitica, si ipotizzi ancora che lo scarto tra il valore effettivo di tale grandezza e quello derivato teoricamente sia esprimibile attraverso un fattore di errore Δ di tipo moltiplicativo.

La resistenza effettiva dell'elemento risulta pertanto espressa dalla variabile:

$$R = R_t \Delta \tag{10}$$

Per semplificare gli sviluppi del procedimento di stima della distribuzione di probabilità di R, si ponga poi l'ipotesi che le variabili di base e la variabile d'errore abbiano una legge di distribuzione log-normale e siano tra loro indipendenti.

Passando ai logaritmi, si ricava pertanto che:

$$\ln R = \alpha_1 \ln X_1 + \alpha_2 \ln X_2 + \ldots + \alpha_n \ln X_n + \ln \Delta \tag{11}$$

essendo: ($\ln X_i$) e ($\ln \Delta$) variabili aleatorie a distribuzione normale.

La resistenza effettiva dell'elemento è quindi funzione:

a) di una variabile aleatoria a distribuzione log-normale R_t, i cui parametri possono essere calcolati a partire dalle caratteristiche delle variabili di base, combinando le informazioni disponibili a priori con quelle ricavate attraverso le prove [5]:

$$m_{R_t} = E[\ln R_t] = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i E[\ln X_i] \tag{12}$$

$$s^2_{R_t} = \sigma^2[\ln R_t] = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \sigma^2 [\ln X_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \ln(1 + C^2(X_i)) \tag{13}$$

essendo $C(X_i)$ il coefficiente di variazione di X_i;

b) di una variabile aleatoria log-normale Δ nota attraverso la stima dei parametri m_Δ e s_Δ. Proprio la valutazione degli estimatori di m_Δ e s_Δ comporta alcune approssimazioni. I valori osservati della variabile d'errore:

$$\ln \delta_i = \ln \frac{r_{ci}}{r_{ti}} \quad (1 = 1, n) \tag{14}$$

(gli r_{ci} sono i valori di R misurati direttamente, mentre gli r_{ti} quelli ricavati attraverso l'espressione analitica (9)) permettono di definire una realizzazione del valore medio della variabile d'errore:

$$\ln \Delta^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \delta_i \tag{15}$$

e quindi del fattore medio di correzione del modello analitico. Una realizzazione della varianza di Δ è espressa dalla relazione:

$$s^{2*}[\ln \Delta^*] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\ln \delta_i - \ln \Delta^*)^2 \tag{16}$$

Risulta pertanto:

$$\mathbf{E}[\ln \Delta^*] \cong m_\Delta \qquad \mathbf{E}[s^{2*}[\ln \Delta^*]] \cong s^2_\Delta$$

Nel caso in cui alcune variabili di base non siano effettivamente misurate, ma solo definite sulla base di valori nominali, e nell'ipotesi che siano noti i valori medi di esse, risulta necessario correggere la stima della varianza della variabile d'errore, secondo la relazione seguente:

$$s^2[\ln \Delta] = s^{2*}[\ln \Delta] + \frac{n-1}{n-2} \sum_{j=l+1}^{p} \sigma^2(\ln X_j) \tag{17}$$

La variabile di resistenza R risulta pertanto una variabile aleatoria a distribuzione log-normale, di parametri:

$$m_R = E[\ln R] = m_{Rt} + m_\Delta \tag{18}$$

$$s_R = \sigma[\ln R] = \sqrt{s_{Rt}^2 + s_\Delta^2} \tag{19}$$

e di valore caratteristico (corrispondente al frattile di ordine k):

$$R_k = \exp(m_{Rt} + m_\Delta - u_k \sqrt{s_{Rt}^2 + s_\Delta^2}) \tag{20}$$

essendo:

$$u_k = \Phi^{-1}\left(\frac{1+k}{2}\right)$$

e $\Phi(\cdot)$ la funzione di distribuzione normale standard.

Per tener conto dell'incertezza statistica legata all'impiego di un numero limitato di risultati sperimentali, è opportuno sostituire al valore deterministico R_k una variabile definita dalla relazione:

$$R_k^E = X^* - k_s S^* \tag{21}$$

e tale che: $P(R_k^E < R_k) = p$ con p fissato (ad esempio pari a 0.75).

In via semplificata, tralasciando gli sviluppi del procedimento, è possibile porre:

$$R_k^E = m_{Rt} \exp[\ln \Delta^* - u_k \alpha_k^E s_{Rt} - k_s \alpha_\Delta^E s[\ln \Delta] - \frac{1}{2} s_{Rt}^2] \tag{22}$$

essendo:

$$\alpha_k^E = \frac{s_{Rt}}{\sqrt{s_{Rt}^2 + s_\Delta^2}} \qquad \alpha_k^E = \frac{s_\Delta}{\sqrt{s_{Rt}^2 + s_\Delta^2}}$$

i fattori che pesano le due varianze:

$$k_s = \frac{-nu_k\left(1 - \frac{1}{4(n-1)} + k_{sl}\right)}{n\left[\left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right)^2 - \frac{u_p^2}{2(n-1)}\right]}$$

con

$$k_{sl} = \sqrt{n^2 u_k^2 \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right)^2 - n(nu_k^2 - u_p^2)\left[\left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right)^2 - \frac{u_p^2}{2(n-1)}\right]}$$

e:

$$u_p = \Phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right),$$

il fattore dipendente dall'ordine del frattile assunto, per un livello di convergenza della predizione pari a p.

STIMA DEL VALORE CARATTERISTICO DI UNA VARIABILE DI RESISTENZA

A) VARIABILI GAUSSIANE

Il valore caratteristico c della resistenza X di un materiale viene definito come il frattile inferiore di ordine p (in generale il 5%) della correlativa distribuzione di probabilità, ed è quindi tale che la probabilità dell'evento: $\{X \geq c\}$ risulti pari ad (1-p).

In generale esso viene ricavato elaborando i risultati di prove su campioni del materiale, ed attribuendo alla resistenza una distribuzione di tipo gaussiano. Se quindi X è una variabile aleatoria gaussiana con valore medio μ e deviazione standard σ, risulta:

$$c = \mu - k\,\sigma \qquad (23)$$

dove k è un marametro che varia in funzione del valore assunto per p (per: p=0.05, k=1.645; per: p=0.10, k=1.280).

Si ipotizzi quindi di eseguire una serie di prove sperimentali su campioni del materiale, con l'obiettivo di verificare l'ipotesi che il valore caratteristico della resistenza abbia un valore assegnato c, note alcune informazioni disponibili a priori su X (e quindi su $\mathbf{M}$ e Σ) e dati i risultati delle prove, raccolti nel campione statistico: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Secondo il modello d'inferenza bayesiana, il valore caratteristico: $c=\mu-k\sigma$, che corrisponde ad una distribuzione gaussiana di X, rappresenta una osservazione della variabile aleatoria: $C=\mathbf{M}-k\Sigma$. Utilizzando le informazioni addizionali, è possibile aggiornare la distribuzione di probabilità della variabile C. Nell'ipotesi infatti che la distribuzione congiunta a priori di ($\mathbf{M}$, log Σ) sia non informativa, si ricava [8] per la variabile:

$$\frac{C - x^*}{s / \sqrt{n-1}} = \frac{[(M - x^*) / (\Sigma / \sqrt{n})] - k\sqrt{n}}{\sqrt{[1/(n-1)][n s^2 / \Sigma^2]}} \tag{24}$$

una distribuzione t di Student non centrata, con (n-1) gradi di libertà e parametro di non centralità:

$$\delta = -k\sqrt{n}.$$

Nella relazione precedente, si è posto:

$$x^* = \frac{1}{n}\Sigma x_j \qquad s = \sqrt{\frac{(x_i - x^*)^2}{n-1}}$$

Assegnata la densità di probabilità a posteriori della variabile C, è immediato valutarne gli intervalli di confidenza ad un assegnato livello di probabilità. Ad essi è possibile, ad esempio, correlare i criteri di accettazione del materiale: siano infatti t_{p1} e t_{p2} due frattili di questa densità, corrispondenti a valori di probabilità p_1 e p_2. L'intervallo di confidenza a probabilità $(p_2$-$p_1)$ della variabile C è definito come l'intervallo:

$$\left[x^* + t_{p1}\, s / \sqrt{n-1},\, x^* + t_{p2}\, s / \sqrt{n-1}\right] \tag{25}$$

In alternativa, è possibile valutare la densità predittiva della resistenza X del materiale ed accettare la qualità di esso se risulta soddisfatta la condizione: $f_x(c \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq p$, essendo p un valore di probabilità sufficientemente ridotto (ad esempio il 10%). Al riguardo si dimostra che la densità predittiva è tale che la variabile:

$$\frac{C - x^*}{s}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \tag{26}$$

ha una densità t di Student a (n-1) gradi di libertà.

B) VARIABILI NON GAUSSIANE

L'ipotesi che la resistenza di un materiale abbia una distribuzione di tipo gaussiano non è accettabile in via di principio, perché tale distribuzione è definita anche per valori negativi della variabile, mentre la grandezza in esame è sicuramente positiva: viene comunque adottata per la semplicità di trattazione analitica e quando il livello di approssimazione che si consegue è dello stesso ordine di grandezza di quello implicitamente accettato perché connesso alle incertezze del modello di analisi strutturale.

Soprattutto se il numero di risultati sperimentali è limitato, l'ipotesi di normalità fornisce però una stima troppo approssimata dei frattili inferiori della effettiva distribuzione di probabilità della variabile. Tale problema può essere risolto adottando modelli più efficienti di approssimazione della distribuzione reale, così come risulta dal campionamento statistico.

Tra i possibili approcci, appare di un certo interesse un modello di tipo polinomiale [9], definito in modo da assumere in alcuni punti prefissati il valore effettivo della funzione di distribuzione della variabile campionata.

Si consideri pertanto un insieme di n risultati campionari, di valore pari a: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ed ordinati in modo che risulti:$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Sia poi F(x) una funzione definita dalla relazione:

$$F(x) = \frac{i}{1+n}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{27}$$

e Z una variabile normale standard tale che:

$$F(x_i) = \Phi(z) \tag{28}$$

La variabile Z assume quindi in n punti i valori assunti dalla funzione di distribuzione della variabile X: in particolare per: F(x)=0.5, sarà: z=0. Sia poi:

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z + \ldots a_{p-1} z^{p-1} = \frac{(x/x_\mu)^2 - 1}{2(x/x_\mu)} \tag{29}$$

una approssimazione della $\Phi(z)$. x_μ è un valore definito opportunamente, in modo da rendere: $F(x_i)=y$ nel punto medio, e quindi tale che: $x_\mu=x_k$, per $n = (2k-1)$; e: $x_\mu=(x_k + x_{k+1})/2$, per $n = 2k$.

Poiché per $x=x_k$, risulta: z=0 ed y=0, è evidente che deve essere anche: $a_0=0$. I rimanenti valori dei coefficienti a_i vengono ricavati imponendo che: $F(x_i)=y$ in altri (p-1) punti.

Se si osserva l'espressione:

$$y = \frac{(x/x_\mu)^2 - 1}{2(x/x_\mu)} \tag{30}$$

si verifica che:

- y è adimensionale, come è giusto per generalizzare i risultati e renderli

indipendenti dall'unità di misura si X;
- y è tale da render soddisfatte le condizioni al contorno, poiché: $y \to -\infty$ per $x \to 0$; e $y \to \infty$ per $x \to \infty$

Poiché x è sicuramente positivo, è immediato ricavare che:

$$x = x_\mu (y + \sqrt{1 + y^2}) \tag{31}$$

Ponendo a titolo di esempio: p=3, si ottiene:

$$y = a_1 z + a_2 z^2 \tag{32}$$

ed assumendo che l'identità: $F(x_i)=y$ sia soddisfatta nei punti 1 ed n (cioè in corrispondenza dei valori rispettivamente minimo e massimo del campione) si ottiene:

$$z_1 = -z_n \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_n}{2z_1} \qquad a_2 = \frac{y_1 - y_n}{2z_1^2}$$

e quindi:

$$y = \left(\frac{y_1 - y_n}{2}\right)\left(\frac{z}{z_1}\right) + \left(\frac{y_1 + y_n}{2}\right)\left(\frac{z}{z_1}\right)^2 \tag{33}$$

Un valore della variabile corrispondente ad un frattile di qualsiasi ordine viene ricavato dalle relazioni precedenti. Da esse si rileva che il rapporto: $t = z/z_1$, è funzione dell'ordine del frattile assunto e della numerosità del campione; i suoi valori possono essere pertanto tabellati, così come indicato nella Tabella 1 nel caso del frattile di ordine 0.02 e per n compreso tra 10 e 20.

Il valore caratteristico della variabile si calcola quindi attraverso le seguenti fasi:
a) calcolo di:

$$y_1 = \frac{(x_1 / x_\mu)^2 - 1}{2(x_1 / x_\mu)} \tag{34}$$

$$y_n = \frac{(x_n / x_\mu)^2 - 1}{2(x_n / x_\mu)} \tag{35}$$

b) valutazione di t in funzione di n e dell'ordine del frattile;
c) calcolo di:

$$y^* = \left(\frac{y_1 - y_n}{2}\right)t + \left(\frac{y_1 + y_n}{2}\right)t^2 \tag{36}$$

c) calcolo di:

$$c = x_\mu (y^* + \sqrt{1 + y^{*2}}) \tag{37}$$

Tabella 1 - Valori del fattore t corrispondenti al frattile al 2%

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t	1.53	1.49	1.43	1.39	1.37	1.34	1.31	1.29	1.27	1.25	1.23

La procedura indicata fornisce quindi una valutazione consistente del valore caratteristico della variabile a partire da un numero limitato di osservazioni di essa.

CONCLUSIONI

In precedenza sono stati illustrati i criteri generali di una procedura per la programmazione delle ispezioni sulle costruzioni: tale procedura permette di ottimizzare il costo totale atteso del programma di manutenzione attraverso la stima delle probabilità di collasso dei componenti del sistema strutturale. La sua generalizzazione all'analisi dell'intero sistema è peraltro concettualmente semplice, una volta che sia definita la logica funzionale secondo cui i diversi componenti sono associati ai fini della stima dell'affidabilità e siano evidenziati i livelli di danno critici per il complesso dei componenti.

La procedura indicata, che verrà applicata all'analisi di un problema concreto in un prossimo lavoro, è basata sull'impiego combinato delle tecniche dell'inferenza bayesiana e dei metodi avanzati del secondo ordine ai secondi momenti, perché richiede di aggiornare la stima dell'affidabilità strutturale in base alle informazioni desumibili attraverso le indagini svolte in sito.

Nella seconda parte infine sono stati delineati alcuni problemi che si pongono nella interpretazione statistica dei risultati delle prove sperimentali, sia ai fini di una valutazione probabilistica della sicurezza strutturale che della stima di valori delle variabili caratterizzati da un prefissato livello di probabilità. Tali operazioni costituiscono infatti il corretto presupposto su cui basare le successive verifiche di sicurezza.

BIBLIOGRAFIA

1. MADSEN, H.O. (1987): *"Model Updating in Reliability Theory"*, in: Reliability and Risk Analysis in Civil Engineering, Vol. 1, Atti della: International Conference on Application of Statistics and Probability ICASP'5, Vancouver, Canada, Maggio, 565
2. CIAMPOLI, M., PINTO, P.E. (1989): *"Metodi per la valutazione della sicurezza delle strutture esistenti"*, Atti del Congresso AICAP'89, Napoli, Maggio, 21
3. CIAMPOLI, M. (1989): *"Reliability Evaluation of Existing Structures: Updating Technique to Account for Experimental Data"*, Atti della Conferenza Internazionale su: "Monitoring Surveillance and Predictive Maintenance of Plants and Structures", AIPnD, Taormina, Ottobre
4. RADOGNA, E.F., NAPOLI, P. (1990): *"Revised Safety Criteria/Rules"*, C.E.B. General Task Group 21 "Re-design of Concrete Structures" State-of-the-Art Report, Cap. 3 (di prossima pubblicazione); CIAMPOLI, M. (1990): *"Revised Safety Criteria/Rules"*, C.E.B. General Task Group 21 "Re-design of Concrete Structures" State-of-the-Art Report, Appendice al Cap. 3 (di prossima pubblicazione)
5. CIAMPOLI, M., NAPOLI, P., RADOGNA, E.F. (1990): *"Criteri generali per la stima della sicurezza nelle costruzioni esistenti"*, L'Industria Italiana del Cemento, Fascicolo di Novembre 1990
6. FUJITA, M., SCHALL, G., RACKWITZ, R. (1989): *"Adaptive Reliability-Based Inspection Strategies for Structures subjected to Fatigue"*, Atti della: 5th International Conference on Structural Safety and Reliability ICOSSAR '89, San Francisco, California, Agosto, 1619
7. ANG, A.H.-S., TANG, W.H. (1984): *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II: Decision, Risk and Reliability*, John Wiley & Sons, New York
8. DITLEVSEN, O. (1981): *Uncertainty Modeling with Applications to Multidimensional Civil Engineering Systems*. McGraw-Hill, USA
9. JAEGER, L.G., BAKHT, B. (1990): *"Lower Fractiles of Materiale Strength from Limited Test Data"*, in: Structural Safety, N. 7, 67