Ratio Math. 3
(1992), 85 - 93

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA VALUTAZIONE DELLA CAPACITÀ D'UNA FUNZIONE D'UTILITÀ

Lorenzo Peccati
Un. di Torino e Un. "Bocconi"
Dicembre 1991

1. INTRODUZIONE

In molte pratiche applicazioni soprattutto di tipo assicurativo[1] le preferenze individuali in presenza di rischio sono modellizzate attraverso una funzione d'utilità bernulliana u analiticamente piuttosto comoda:

$$u(x) = x - \frac{1}{2B}x^2 \quad x \leq B$$

La funzione d'utilità così definita è brevemente detta *utilità quadratica*, e il parametro B può dirsi *capacità* della funzione u.

La valutazione della capacità può farsi sottoponendo al decisore la possibilità di negoziare la somma aleatoria $\mathbf{X}$ che ha la seguente distribuzione di probabilità (prima riga: determinazioni; seconda riga: probabilità corrispondenti):

$$\mathbf{X} = \begin{cases} 0 & V \\ 1-\pi & \pi \end{cases}$$

ove $V>0$ e $0<\pi<1$.

[1] Si veda, per es., Daboni (1988).

Tale negoziazione può farsi sia proponendo al soggetto di acquistare **X**, contro il pagamento di un prezzo massimo αV (con $0 \le \alpha \le 1$), sia di vendere il diritto a **X** contro riscossione di un prezzo minimo che denoterà ancora con αV.

La dichiarazione di α da parte del decisore "rivela" il valore del parametro B che caratterizza la funzione d'utilità. Viene fatto enunciare al soggetto nient'altro che il *certo equivalente per il compratore o per il venditore*[2].

In presenza di avversione al rischio il decisore fisserà $\alpha < \pi$ (e questo sarà nel seguito supposto).

Interessa segnalare che, anche attraverso la fissazione di α (con $\alpha < \pi$), non è affatto detto che la stima per B che ne scaturisce sia sensata.

Indicherò, nel prossimo paragrafo, qual è l'insieme in cui si può scegliere α affinché la stima di B non sia insensata. Nel paragrafo successivo introdurrò una famiglia di funzioni d'utilità che generalizza quella di partenza, mostrando come anche per esse si ripresenti il problema e come possa essere analogamente risolto. Seguiranno alcune riflessioni conclusive.

2. VALORI AMMISSIBILI NEL CASO QUADRATICO

Consideriamo dapprima il caso del compratore che acquista la somma aleatoria **X** contro pagamento del prezzo certo αV. Supponiamo, ripeto, che $\alpha < \pi$.

Dovrà essere:

$$\mathbf{E}[u(\mathbf{X} - \alpha V)] = 0$$

onde, vista la specificazione analitica di u:

$$\mathbf{E} = \left[(\mathbf{X} - \alpha V) - \frac{1}{2B} (\mathbf{X} - \alpha V)^2 \right] = 0$$

si trae:

$$B = \frac{\mathbf{E}[(\mathbf{X} - \alpha V)^2]}{2\mathbf{E}(\mathbf{X} - \alpha V)}$$

Osservato che:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \pi V \quad ; \quad \mathbf{E}(\mathbf{X}^2) = \pi V^2 ;$$

[2] Si veda PECCATI (1990)

$$\mathbf{E}[(\mathbf{X}-\alpha V)^2]=V^2(\pi-2\alpha\pi+\alpha^2)$$

si ha subito:

$$\mathrm{B}=\frac{V(\pi-2\alpha\pi+\alpha^2)}{2(\pi-\alpha)}$$

Perché la stima possa aver senso bisogna che il massimo valore del guadagno per il decisore $V-\alpha V=(1-\alpha)V$ non ecceda la capacità B.

La condizione:

$$(1-\alpha)V\leq\frac{V(\pi-2\alpha\pi+\alpha^2)}{2(\pi-\alpha)}$$

si riduce (essendo, per ipotesi, $\alpha<\pi$) a:

$$\alpha^2-2\alpha+\pi\leq 0$$

per α deve allora aversi:

$$1-\sqrt{1-\pi}\leq\alpha\leq 1+\sqrt{1-\pi}$$

La disuguaglianza di destra è ovviamente vera quella di sinistra fornisce un confine inferiore non banale per α.

Osservato che banalmente $\alpha_0(\pi)\overset{d}{=}1-\sqrt{1-\pi}\leq\pi$ poiché possa aver senso una stima di B ricavata dall'elicitazione del prezzo unitario α deve essere:

$$1-\sqrt{1-\pi}\leq\alpha<\pi$$

Si controlla facilmente che anche vedendo il problema dal punto di vista del venditore nella muta[3]. In tal caso la condizione che deve esser sodisfatta è:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{X}-\frac{1}{2B}\mathbf{X}^2\right)=\alpha V-\frac{1}{2B}\alpha^2V^2$$

Se ne trae la stima per B:

[3]Questo è interessante perché è nota la non equivalenza in generale dei due punti di vista nel caso di utilità quadratica.

$$B = \frac{V(\pi - \alpha^2)}{2(\pi - \alpha)}$$

Perché B sia accettabile deve essere $V \leq B$. Sostituendo si ritrova la limitazione inferiore per α col confine $\alpha_0(\pi)$.

La tavola seguente dà tale confine inferiore $\alpha_0(\pi) = 1 - \sqrt{1-\pi}$ per α al variare di π:

π	$\alpha_0(\pi)$
0	0
0.05	0.02532
0.10	0.05132
0.15	0.07805
0.20	0.1056
0.25	0.134
0.30	0.1633
0.35	0.1938
0.40	0.2254
0.45	0.2584
0.50	0.2929
0.55	0.3292
0.60	0.3675
0.65	0.4084
0.70	0.4523
0.75	0.5
0.80	0.5528
0.85	0.6127
0.9	0.6838
0.95	0.7764
1.00	1

Come si vede la limitazione per α è piuttosto severa.

3. UNA GENERALIZZAZIONE

In letteratura, con riferimento alla classe di funzioni d'utilità definite da:

$$u(x) = \frac{x^{\gamma}}{\gamma}$$

definite per $x>0$, con $\gamma \neq 0$ reale qualsiasi, si parla di classe *HARA*. L'acronimo sta per *Hyperbolic Absolute Risk Aversion*.

Detta r l'avversione (assoluta)[4] al rischio nel senso di (de Finetti)-Arrow-Pratt:

$$r(x) \overset{d}{=} -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

si ottiene:

$$r(x) = \frac{1}{x}$$

che giustifica il nome. La popolarità di tale classe di funzioni d'utilità, facilmente intuibile per la loro semplicità dal punto di vista analitico, non appare del tutto giustificata. La limitazione $x>0$ ne rende problematica l'applicazione corretta quando si debba[5] tener distinta la posizione del venditore da quella del compratore. Anche quando sia certo che una somma aleatoria non può esser in nessun caso negativa, se si tratta di valutarla per la vendita, non si possono presentare valori negativi per l'argomento di u, ma nel caso dell'acquisto la differenza tra somma acquistata e prezzo può, generalmente, anche "pescare" nel negativo, con insuperabili difficoltà.

È affatto evidente che sotto la sigla *HARA* possono rientrare anche altre funzioni d'utilità, con avversione al rischio iperbolica e più interessanti dal punto di vista delle applicazioni finanziarie.

Considero la seguente funzione iperbolica di avversione al rischio:

$$r(x) = \frac{A}{B-x}$$

con $x<B$ e A parametro positivo. Nel caso quadratico si ha:

---

[4] Si veda, per es., COPELAND-WESTON (1988).

[5] E nelle applicazioni finanziarie si deve.

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)}=-\frac{-1/B}{1-x/B}=\frac{1}{B-x}$$

e a tale espressione si riduce $r(x)$ quando A=1. Pare legittimo parlare di classe *HARA* anche con riferimento alle funzioni d'utilità con tale avversione al rischio, funzioni impiegabili per $x<B$ e quindi più adatte per un corretto impiego in ambito finanziario. Su questa classe di funzioni d'utilità fermerò la mia attenzione in questo paragrafo.

Risolvendo l'equazione differenziale:

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)}=\frac{A}{B-x}$$

con le condizioni al contorno $u(0)=0$ e $u'(0)=1$ s'ottiene:

$$u(x)=\frac{B-B^{-A}(B-x)^{A+1}}{A+1}$$

che ovviamente si riduce alla quadratica se $A=1$.

Suppongo, nel seguito, in perfetta analogia con la situazione esaminata nel paragrafo 2, che A sia nota e mi propongo studiare la stima di B attraverso l'indicazione di un prezzo per il solito ammontare aleatorio **X**. Non si otterranno più equazioni esplicitamente solubili in B, che possono essere peraltro risolte in concreto attraverso metodi numerici. Mi limiterà a indicare sotto quali restrizioni esista (e sia unica) una stima per B.

Comincio dal caso del *venditore*. L'equazione $u(\alpha V)=\pi u(V)$ diviene:

$$\frac{B-B^{-A}(B-\alpha V)^{A+1}}{A+1}=\pi\frac{B-B^{-A}(B-V)^{A+1}}{A+1}$$

con semplici passaggi si riduce a:

$$(1-\pi)B^{A+1}=(B-\alpha V)^{A+1}-(B-V)^{A+1}$$

Dirò nel seguito $P(B)$ il primo e $S(B)$ il secondo membro dell'equazione in B. Interessa, naturalmente, una soluzione per la stessa, che sia maggiore di V in quanto il massimo valore che può assumere **X** non deve superare la capacità di u. Affronto sbrigativamente le classiche questioni di esistenza e unicità.

Per quanto concerne l'esistenza la strada è semplice.

Osservo subito che $S(B)=o[P(B)]$ per $B\to+\infty$ e quindi definitivamente

P(B)>S(B). Noto anche che ponendo $B=V$ in P e S si ottiene:

$$P(V)=(1-\pi)V^{A+1} \quad ;S(V)=(1-\alpha)^{A+1}V^{A+1}$$

L'esistenza è garantita se $P(V)<S(V)$ stante la continuità di tali due funzioni. Ora, tale condizione si riduce facilmente a:

$$\alpha > \alpha_0(\pi,A) \stackrel{d}{=} 1-(1-\pi)^{1/(A+1)}$$

che visibilmente generalizza quella individuata nel precedente paragrafo per il caso quadratico[6].

Per provare l'unicità i calcoli non sono così brevi, ma si può comunque arrivare in porto. Basta riprendere l'equazione di partenza

$$u(\alpha V)=\pi u(V)$$

e osservare che equivale alla seguente:

$$\frac{1-(1-\alpha V/B)^{A+1}}{1-(1-V/B)^{A+1}}=\pi$$

che si riscrive, più semplicemente:

$$\frac{1-(1-\alpha y)^{A+1}}{1-(1-y)^{A+1}}=\pi$$

con $y=V/B\in(0;1)$. Basta mostrare che il primo membro è funzione monotòna di y per avere l'unicità garantita. Posto $f(y)=1-(1-y)^{A+1}$, la funzione di cui c'interessa provare la monotonìa è definita da $\psi(y)=f(\alpha y)/f(y)$. Si controlla senza difficoltà che $\psi(0^+)=\alpha$ e che $\psi(1)=1-(1-\alpha)^{A+1}>\alpha$. La condizione $\psi'(y)>0$ equivale a:

$$\alpha\frac{f'(\alpha y)}{f(y)}>\frac{f'(y)}{f(y)}$$

che, a sua volta è garantita se D $\ln[f(y)]$ decresce. Posto $g(y)=\ln f(y)$, basta allora provare che $g''(y)<0$ in $(0;1)$. Si ha:

---

[6]Al solito, ad essa si riduce con $A=1$.

$$g'(y) = (A+1)\frac{1}{(1-y)^{-A} - 1 + y}$$

onde:

$$g''(y) = (A+1)\frac{-1}{[(1-y)^{-A} - 1 + y]^2}\left[1 + \frac{A}{(1-y)^{A+1}}\right] < 0$$

e si ha l'asserto.

Passo ora al caso del *compratore*. L'equazione che definisce il certo equivalente e dalla quale dovrebbe riuscire determinato B è la seguente:

$$\pi\frac{B - B^{-A}[B - V(1-\alpha)]^{A+1}}{A+1} + (1-\pi)\frac{B - B^{-A}(B - \alpha V)^{A+1}}{A+1} = 0$$

Considerazioni analoghe a quelle svolte poco sopra garantiscono l'unicità di un'eventuale soluzione. Quanto all'esistenza, si può osservare che:

- per $B \to +\infty$ il primo membro è asintotico a $B(1-\pi)/(A+1)$ e dunque è positivo;

- per $B = V(1-\alpha)$ esso si riduce a:

$$\pi\frac{V(1-\alpha)}{A+1} + (1-\pi)\frac{V(1-\alpha) - [V(1-\alpha)]^{-A}(V - \alpha V + \alpha V)^{A+1}}{A+1}$$

Il segno di tale quantità è lo stesso di:

$$\pi + (1-\pi)[1 - (1-\alpha)^{-A-1}]$$

Esiste una soluzione se tale quantità è negativa. Pochi passaggi conducono a provare che essa lo è se:

$$\alpha > \alpha_0(\pi, A) = 1 - (1-\pi)^{1/(A+1)}$$

coincidente con la limitazione data sopra.

[7] KEENEY-RAIFFA (1976).

4. RIFLESSIONI CONCLUSIVE

Può interessare confrontare tale nuovo confine inferiore per α con quello individuato nel par. 2 per il caso quadratico e cioè $\alpha_0(\pi,1)$.

Si conclude facilmente che questo nuovo confine riesce più stringente (ossia $\alpha_0(\pi,A)>\alpha_0(\pi,1)$) se $A<1$. Questo ovviamente discende dal fatto che $\alpha_0(\pi,A)$ decresce al crescere di A. Rammentando, a questo punto qual è il significato strategico[7] del parametro A si desume che, nella classe di funzioni di utilità in esame, quanto maggiore è l'avversione al rischio del valutatore, tanto più basso è il confine di compatibilità del certo equivalente con tale tipo di funzione. E questo è consolante.

BIBLIOGRAFIA

L. DABONI (1988): *Lezioni di Tecnica Attuariale delle Assicurazioni contro i danni.* LINT, Trieste.

T.E. COPELAND, J.F. WESTON (1988): *Financial Theory and Corporate Policy*, 3rd ed., Addison Wesley, Reading, Mass.

R.L. KEENEY, H. RAIFFA (1976): *Decisions with multiple objectives: Preferences and Value* Tradeoffs. Wiley, New York.

L. PECCATI (1990): 'Certainty equivalent and time', *Eighth Meeting of the EURO-Working Group on Financial Modelling,* Gieten, November.