Numero 2 - 1991

RATIO MATHEMATICA

Atti del Convegno di
Matematica Applicata all'Economia e all'Ingegneria

Pescara 29, 27, 28 Gennaio 1989

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Direttore Responsabile: Prof. FRANCO EUGENI

Autorizzazione n. 9/90 del 10-07-1990

Fascicolo realizzato con il contributo del Dipartimento di Scienze, e Storia dell'Architettura e Restauro. Hanno collaborato alla realizzazione di questo fascicolo: il Prof. Antonio Maturo e gli ingegneri G. Di Biase, D. Marconi e G. Mataloni.
Fotocomposizione e stampa:

microPRINT - Lungomare Matteotti, 111 - Pescara

Indice del fascicolo

RATIO MATH. 2
(1991), 1 - 12

UN PROBLEMA TRIDIMENSIONALE DI TRASPORTO FUORI DI UNA SFERA RIFLETTENTE

L. Bassi, P. Gamba (*)

SOMMARIO. In questo lavoro studiamo l'equazione lineare monoenergetica di Boltzmann nello spazio esterno ad una sfera di raggio $a > 0$ con condizioni al contorno di riflessione speculare. Servendoci della teoria dei semigruppi di operatori lineari positivi in spazi di Banach dimostriamo che l'operatore di streaming è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni positive, di cui diamo la forma esplicita, e che l'operatore di Boltzmann è il generatore infinitesimale di semigruppo fortemente continuo e irriducibile. Inoltre studiamo in maniera completa lo spettro dell'operatore di streaming.

ABSTRACT. In this paper we study the linear monoenergetic Boltzmann equation in the space external to a sphere of radius $a > 0$ with specular reflection boundary conditions. By means of theory of linear positive operator semigroups in Banach spaces we show that streaming operator is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup of positive contractions, of which we give the explicit form, and that Boltzmann operator is the infinitesimal generator of an irreducible strongly continuous semigroup. Moreover we study completely the spectrum of streaming operator.

1. INTRODUZIONE

L'equazione lineare del trasporto di Boltzmann fu usata all'inizio per lo studio del trasporto di energia radiante in atmosfere stellari o planetarie ([2], [9] ed in seguito per descrivere il trasporto di neutroni e raggi gamma in sistemi nucleari ([1], [4], [5]): nel primo caso la funzione incognita rappresenta l'intensità di radiazione, nel secondo la distribuzione di particelle.

(*) Dipartimento di Matematica "Vito Volterra", Università degli Studi di Ancona.

Uno studio dettagliato dell'equazione lineare del trasporto è stato fatto da Voigt [13] ed alcuni dei più importanti risultati di questo studio sono stati usati nel nostro lavoro. Per l'equazione lineare del trasporto è importante considerare sia problemi interni, derivanti dalla teoria dei reattori nucleari, sia quelli esterni, derivanti dal trasporto di radiazione.

In questo lavoro ci serviamo della teoria dei semigruppi di operatori lineari in spazi di Banach L^p ($1 \leq p < \infty$).

Tale teoria si è sviluppata abbastanza rapidamente a partire dal teorema di generazione di Hille e Yosida del 1948 e da allora si è estesa con importanti applicazioni a molti campi dell'analisi grazie soprattutto a Ralph Phillips [7]. Tuttavia solo in tempi recenti la teoria ha avuto un'adeguata sistemazione essenzialmente basata sulle tecniche sviluppate per gli operatori positivi su spazi di Banach e combinando l'analisi funzionale con lo studio di problemi di Cauchy collegati in particolare con problemi concreti di evoluzione in teoria del trasporto, biomatematica e fisica ([3], [10], [11], [12]).

Sia X uno spazio di Banach ed A un operatore lineare da $\mathcal{D}(A) \subset X$ in X; dato $x \in X$ il problema astratto di Cauchy per A con dato iniziale x consiste nel trovare una soluzione f (t) del problema

$$\begin{cases} \dfrac{d f(t)}{d t} = A f(t), & t > 0 \\ f(0) = x \end{cases} \qquad (*)$$

dove per soluzione si intende una funzione f (t) a valori in X tale che f (t) è continua per $t \geq 0$, derivabile con continuità, con $f(t) \in \mathcal{D}(A)$ per $t > 0$ e soddisfacente il problema (*). Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo di operatori T (t), il problema astratto di Cauchy per A ha soluzione unica $f(t) = T(t)\,x$, per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$.

In questo lavoro, nel paragrafo 2 introduciamo le notazioni usate nel seguito e definiamo l'operatore di streaming T e l'operatore di Boltzmann B.

Nel paragrafo 3 studiamo l'operatore T, mostrando che esso è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo (teorema 1) di cui diamo la forma e stabiliamo le proprietà spettrali di T (teorema 2).

Nel paragrafo 4 esaminiamo l'operatore B, che, per il noto teorema di perturbazione limitata, risulta generatore di un semigruppo fortemente continuo di cui diamo (teorema 3) una importante proprietà mostrando che esso è irriducibile.

2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Consideriamo l'equazione di Boltzmann lineare monoenergetica nello spazio D esterno ad una sfera di raggio $a > 0$, assumendo condizioni al contorno di riflessione speculare.

Supponiamo che lo spazio S delle velocità sia la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$ e che la sezione d'urto sia costante.

Pertanto esamineremo l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = - \vec{\Omega} . \nabla_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - f(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \\ + \int_S k(\vec{r}, \vec{\Omega}', \vec{\Omega},) f(\vec{r}, \vec{\Omega}', t)\, d\vec{\Omega}', \tag{1}$$

insieme alle condizioni iniziali ed al contorno.

In (1) $f(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ può essere considerata o come intensità specifica di radiazione o come funzione di distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi $D \times S$ al tempo t; $k: D \times S \times S \to \mathbb{R}$ rappresenta l'albedo per singolo scattering.

Introducendo su D la restrizione della misura di Lebesgue μ e su S la misura di superficie ω, supponiamo che k sia una funzione misurabile strettamente positiva.

Al fine di scrivere il nostro problema in forma astratta, sono necessarie alcune notazioni ed alcune definizioni.

Indichiamo con η la misura su $D \times S$, cioè $\eta = (\mu \mid D) \times \omega$. Denotiamo con $C^{1,0}_c(DxS)$ l'insieme di tutte le funzioni complesse su DxS che sono continue, derivabili con continuità rispetto alle variabili spaziali e a supporto compatto; infine sia $X = L^p(DxS)$ lo spazio di Banach complesso dotato della norma usuale.

Si definiscono gli operatori T_0 e K come segue:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T_0) = \{ f \in X : \exists\, g \in X \text{ tale che } \forall\, \varphi \in C^{1,0}_c(DxS), \int [(-\vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{r}} - I)\, \varphi]\, f\, d\eta \\ \qquad = - \int \varphi\, g\, d\eta \} \\ T_0 f := g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}(K) = X \qquad \mathfrak{R}(K) \subset X \\ (Kf) := \int_S k(\vec{r}, \vec{\Omega}', \vec{\Omega})\, f(\vec{r}, \vec{\Omega}')\, d\vec{\Omega}'. \end{cases}$$

Osserviamo che se $f \in C^{1,0}_c$, allora è $T_0 f = -\vec{\Omega} \cdot \nabla_{\vec{r}} - f$.

Detta σ la misura di superficie sulla frontiera ∂D di D, consideriamo il prodotto $|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r})|\ \sigma \times \omega$ come misura su $\Sigma_{\pm} := \{ (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in \partial D \times S,\ |\vec{r}| = a;\ \pm\, \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r}) > 0 \}$, essendo $\vec{n}(\vec{r})$ il versore normale in $\vec{r} \in \partial D$ entrante nello spazio D.

Possiamo così scrivere

$$\| f \|_{\pm} = \left\{ \int_{\Sigma\pm} | f (\vec{r}, \vec{\Omega}) |^p |\vec{\Omega}\bullet\vec{n} (\vec{r})| d (\sigma x \omega) \right\}^{1/p}.$$

Si introducano ora le funzioni $t_{\pm} : DxS \rightarrow [0, + \infty)$ definite come segue:

$$t_{\pm} (\vec{r}, \vec{\Omega}) = \inf \{ t>0 : \vec{r} \pm t \vec{\Omega} \notin D \}$$

che nel seguito saranno indicate semplicemente con $t_{\pm}$ qualora non sorgano ambiguità nel simbolo.

Se $f \in \mathcal{D} (T_0)$, esiste una funzione $\hat{f} \in \mathcal{D} (T_0)$ che soddisfa $\hat{f} = f$ quasi dappertutto (q.d.) e tale che la funzione

$$[-t_-, t_+] \ni t \rightarrow \hat{f} (\vec{r} + t \vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \in \mathbb{R}$$

sia assolutamente continua per quasi ogni (q.o.) $(\vec{r}, \vec{\Omega}) \in DxS$.

Se $-t_- \leq t' < t'' \leq t_+$, allora è

$$\int_{t'}^{t''} (-\vec{\Omega}\bullet\nabla_{\vec{r}} f) (\vec{r}+t\vec{\Omega}, \vec{\Omega})\, dt = \hat{f} (\vec{r} + t'\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - \hat{f} (\vec{r} + t'' \vec{\Omega}, \vec{\Omega})$$

per q.o. $(\vec{r}, \vec{\Omega}) \in DxS$.

Possiamo porre

$$(B_{\pm}f) (\vec{r}, \vec{\Omega}) = \lim_{t \downarrow 0} \hat{f} (\vec{r} \pm t \vec{\Omega}, \vec{\Omega}), \qquad (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in \Sigma_{\pm}$$

in quanto il limite esiste q.d. su $\Sigma_{\pm}$ e non dipende dalla funzione $\hat{f}$; le funzioni $B_{\pm}f$ sono misurabili [13].

Le condizioni al contorno son definite dall'operatore J come segue

$$\begin{cases} \mathcal{D} (J) = L^p (\Sigma_-) & \mathfrak{R} (J) \subset L^p (\Sigma_+) \\ (Jf) (\vec{r}, \vec{\Omega}) = f (\tau (\vec{r}, \vec{\Omega})) & (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in \Sigma_+ \end{cases}$$

dove è $\tau (\vec{r}, \vec{\Omega}) : = [\vec{r}, \vec{\Omega} - 2 [\vec{\Omega}\bullet\vec{n} (\vec{r})] \vec{n} (\vec{r})]$.

L'operatore J descrive la condizione al contorno di riflessione perfetta di tipo speculare; poiché l'applicazione $\tau : \Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-$ è bijettiva e conserva la misura, J è un operatore positivo con $\|J\| = 1$.

Possiamo ora definire l'operatore T come segue:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T) = \{ f \in \mathcal{D} (T_0) : B_{\pm}f \in L^p (\Sigma_{\pm}); B_+f = JB_-f \} & \mathfrak{R} (T) \subset X \\ Tf : = T_0 f \end{cases}$$

Allora stabiliamo il problema di Cauchy in forma astratta

$$df/dt = Bf \qquad f(0) = f_0$$

dove l'operatore B è l'operatore di Boltzmann

$$\begin{cases} \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(T) \qquad \Re(B) \subset X \\ (Bf)(\vec{r}, \vec{\Omega}) = [(T+K)\, f]\, (\vec{r}, \vec{\Omega}). \end{cases}$$

Definiamo infine alcuni spazi ed alcune funzioni che saranno utili nel seguito [13]:

$$V^{\pm} := \{(\vec{r}, \vec{\Omega}) \in DxS : t_{\mp} < +\infty;\ (\vec{r} \mp t_{\mp}\vec{\Omega})\bullet\vec{\Omega} \neq 0\}$$

$$V^{\pm}_{0} := \{(\vec{r}, \vec{\Omega}) \in DxS : t_{\mp} < +\infty;\ (\vec{r} \mp t_{\mp}\vec{\Omega})\bullet\vec{\Omega} = 0\}$$

$$V^{\pm}_{\infty} := \{(\vec{r}, \vec{\Omega}) \in DxS : t_{\mp} = +\infty\}.$$

E' facile riconoscere che: $DxS = V^{+} \cup V^{+}_{0} \cup V^{+}_{\infty} = V^{-} \cup V^{-}_{0} \cup V^{-}_{\infty}$; V^{+} sono insiemi aperti in DxS.

Inoltre osserviamo che $t_{\pm}$ sono funzioni continue su $V^{\pm}$.

Al fine di parametrizzare $V^{\pm}$, definiamo gli insiemi $\tilde{V}^{\pm}$ aperti in $\partial DxSx[R^{+}$ e le applicazioni $p^{\pm}$ come segue

$$\tilde{V}^{\pm} := \{(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \in \Sigma_{\pm} \times (0, +\infty) : 0 < t < t_{\pm} = +\infty\},$$

$$p^{\pm}: \tilde{V}^{\pm} \rightarrow V^{\pm}$$

$$p^{\pm}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) := (\vec{r} \pm t\vec{\Omega}, \vec{\Omega}).$$

Se $q^{\pm} : V^{\pm} \rightarrow \tilde{V}^{\pm}$, date da $q^{\pm}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = (\vec{r} \mp t_{+}\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, t_{\mp})$, sono le inverse delle $p^{\pm}$, osserviamo che $p^{\pm}$ e $q^{\pm}$ sono applicazioni bijettive continue.

Useremo su $\tilde{V}^{\pm}$ le misure $\tilde{\eta}_{\pm} = (|\vec{\Omega}\bullet\vec{n}(\vec{r})|\,\sigma x \omega) x \mu_1$ notando che le applicazioni $p^{\pm}$ e $q^{\pm}$ conservano la misura rispettivamente $\tilde{\eta}_{\pm}$ e η.

3. L'OPERATORE DI STREAMING T.

Per quanto concerne l'operatore di streaming T si dimostra il seguente

TEOREMA 1. *L'operatore* T *è il generatore infinitesimale del semigruppo fortemente continuo* $\{\mathcal{U}(t);\ t\geq 0\}$ *dato da*

$$\mathcal{U}(t)h = \begin{cases} e^{t}\, h(\vec{r} - t\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) & \text{se } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in V^{+}_{\infty} \cup V^{+}_{0} \quad \text{o } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in V^{+} \text{ con } t\_>t \\ \\ e^{-t}\, h\,[p\_(\tau(\vec{r} - t\_\vec{\Omega}, \vec{\Omega}), t - t\_)] & \text{se } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in V^{+} \text{ con } t\_<t \end{cases} \tag{3}$$

che è semigruppo di contrazioni positive.

Dim. Grazie al teorema 5.11 della monografia di Voigt ([13], p. 99), sappiamo che l'operatore (T+I) è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo di operatori lineari e limitati, la cui norma è minore o uguale al max $\{1, \|J\|\}$. Poiché nel nostro caso è $\|J\| = 1$, (T+I) è generatore infinitesimale di un semigruppo di contrazioni. Da ciò e da un noto teorema di perturbazione ([5], p. 280), segue che T stesso genera un C_0-semigruppo $\{\mathcal{U}(t);\ t\geq 0\}$ che $\|U(t)\| \leq e^{-t}\ \forall\ t\geq 0$. Per riconoscere la validità della (3), osserviamo che ogni numero complesso λ, con $\mathrm{Re}\lambda > -1$, appartiene all'insieme risolvente di T. Pertanto per tali λ e per ogni $h \in X$, il problema

$$(\lambda - T)\, f = h \tag{4}$$

ha un'unica soluzione $f \in \mathcal{D}(T)$, data da

$$f = R(\lambda{:}T)\, h = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, \mathcal{U}(t)\, h\, dt \tag{5}$$

Ma possiamo anche risolvere il problema (4) usando lo stesso procedimento seguito da Voigt ([13], p. 100). Notiamo che l'operatore T^0 definito da

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T^0) = [f \in \mathcal{D}(T_0) : B_+ f = 0\} \\ \\ T^0 f := T_0 f \end{cases}$$

è il generatore infinitesimale del semigruppo di contrazioni positive $\{\mathcal{U}_0(t);\ t\geq 0\}$:

$$\mathcal{U}_0(t)\, h = \begin{cases} e^{-t}\, h(\vec{r} - t\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) & \text{per } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in V^{+}_{\infty} \cup V^{+}_{0} \\ & \text{o } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in V^{+} \text{ e } t\_ > t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per ogni $\Phi \in L^p(\Sigma_+)$ poniamo

$$L(\lambda;\Phi) := \begin{cases} e^{-(\lambda+1)t_-}\,\Phi(\vec{r}-t_-\vec{\Omega},\vec{\Omega}) & \text{per } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^+ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Come dimostrato da Voigt ([13], p. 100) è facile vedere che il problema (4) ha come soluzione la funzione

$$f = R(\lambda : T^0)\,h + L(\lambda; JB\_R(\lambda : T^0)\,h) \quad \text{cioè}$$

$$f(\vec{r},\vec{\Omega}) = \begin{cases} \int_0^{t} e^{-(\lambda+1)t}\,h(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega})\,dt + \alpha\int_{t_-}^{+\infty} e^{(-\lambda+1)t}\,h(p^-(\tau(\vec{r}-t_-\vec{\Omega},\vec{\Omega}),t-t_-))\,dt, \\ \qquad\qquad \text{per } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^+ \\ \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+1)t}\,h(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega})\,dt, \qquad \text{per } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^+_\infty \end{cases}$$

Confrontando questo risultato con la (5), deduciamo l'espressione di $\mathcal{U}$ (t).

Da questa espressione possiamo anche vedere che gli operatori $\mathcal{U}$ (t) (t≥0) sono tutti positivi.

Per completare lo studio dell'operatore T stabiliamo le sue proprietà nel seguente

TEOREMA 2. *Il piano spettrale di* T *è suddiviso nel seguente modo:*

(i) $\rho\ (T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \neq -1\}$

(ii) $\sigma_p(T) = \emptyset$

(iii) $\sigma_r(T) = \emptyset$

(iv) $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = -1\}$.

<u>Dim.</u>

(i) Per il teorema 1, $\rho(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > -1\}$. Come nel teorema 1, possiamo facilmente vedere che l' operatore -T è il generatore infinitesimale del C_0-semigruppo $\{\mathcal{V}(t) : t \leq 0\}$ definito come segue:

$$\mathcal{V}(t)\,h = \begin{cases} e^t\,h(\vec{r}+t\vec{\Omega},\vec{\Omega}) \quad \text{se } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^-_\infty \cup V^-_0 \quad \text{o} \quad (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^- \text{con } t_+ > |t| \\ e^t\,h(p^+(\tau(\vec{r}+t_+\vec{\Omega},\vec{\Omega}),t-t_+)) \qquad \text{se } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V \text{ con } t_+ < |t| \end{cases}$$

Possiamo facilmente vedere che $\|\mathcal{V}(t)\| \leq e^t$ e quindi $\rho(-T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > 1\}$ e pertanto $\rho(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda < -1\}$.

Per $0<\delta<1/2$, siano u_δ le funzioni

$$u_\delta(\vec{r},\vec{\Omega}) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\, e^{-\gamma(\vec{r},\vec{\Omega})} e^{-ib\gamma(\vec{r},\vec{\Omega})/\nu(\vec{r},\vec{\Omega})} & \text{se } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^{+} \text{ con } \delta^2 \le \nu \le \delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\gamma(\vec{r},\vec{\Omega}) := \frac{1}{a}\vec{r}\cdot(\vec{r}-t_{-}\vec{\Omega}) - a$, $\nu(\vec{r},\vec{\Omega}) := \frac{1}{a}\vec{\Omega}\cdot(\vec{r}-t_{-}\vec{\Omega})$.

Con semplici calcoli, mostriamo che, se $\lambda=-1+ib$, le funzioni u_δ soddisfano le seguenti condizioni:

a) $$\|u_\delta\|_p^p \ge \frac{\pi^2 a^2\, 2^{p+1}}{p} > 0$$

b) $$\|(T-\lambda)u_\delta\|_p^p = \|\nu u_\delta\|_p^p =$$

$$= \frac{8\pi^2 a^2(1-\delta^{p+1})\delta}{p(p+1)} \longrightarrow 0 \quad \text{per } \delta \to 0.$$

Pertanto $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda = -1\}$ e $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}\lambda \neq -1\}$ [8].

(ii) Si dimostra che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, l'unica soluzione dell'equazione $(\lambda-T)f=0$ è la funzione nulla q.d.. Poiché la funzione $t \to f(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega})$ è assolutamente continua per q.o. $(\vec{r},\vec{\Omega}) \in D\times S$, essa è q.d. derivabile, e si ha

$$(-\vec{\Omega}\cdot\nabla_{\vec{r}} f)(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega}) = \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega})$$

e l'equazione $(\lambda-T)f=0$ diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega}) = (\lambda+1)\, f(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega})$$

la cui soluzione ha la seguente forma:

$$f(\vec{r},\vec{\Omega}) = \begin{cases} e^{-(\lambda+1)t_{-}} f(\vec{r}-t_{-}\vec{\Omega},\vec{\Omega}) & \text{per } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^{+} \\ e^{(\lambda+1)t_{+}} f(\vec{r}+t_{+}\vec{\Omega},\vec{\Omega}) & \text{per } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V^{-} \\ e^{-(\lambda+1)t} f(\vec{r}-t\vec{\Omega},\vec{\Omega}) & \text{per } (\vec{r},\vec{\Omega}) \in V_\infty^{+} \cap V_\infty^{-} \end{cases}$$

Sia $\pi_{\vec{\Omega}}$ il piano equatoriale perpendicolare ad $\vec{\Omega}$ per ogni $\vec{\Omega} \in S$, allora

$$V_\infty^+ \cap V_\infty^- = \left\{ (\vec{r},\vec{\Omega}) ; \vec{r} = \vec{r}' + t\vec{\Omega} , \vec{r}' \in \pi_{\vec{\Omega}} , |\vec{r}'| \geq a , t \in \mathbb{R} \right\}$$

e pertanto

$$\| f \|_p^p = \int_{V_\infty^+ \cap V_\infty^-} |e^{-(\lambda+1)t} f(\vec{r} - t\vec{\Omega},\vec{\Omega})|^p \, d\eta +$$

$$+ \int_{V^+} |e^{-(\lambda+1)t} f(\vec{r} - t\vec{\Omega},\vec{\Omega})|^p \, d\eta + \int_{V^-} |e^{(\lambda+1)t} f(\vec{r} + t\vec{\Omega},\vec{\Omega})|^p \, d\eta =$$

$$= \int_S d\omega \int_{\pi_{\vec{\Omega}} \cap \{\vec{r}' : |\vec{r}'| \geq a\}} d(\mu | \pi_{\vec{\Omega}}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tp\mathrm{Re}(\lambda+1)} |f(\vec{r}',\vec{\Omega})|^p \, dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{-tp\mathrm{Re}(\lambda+1)} \int_{\Sigma_+} |B_+ f|^p \, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r})| \, d(\sigma \times \omega) \, dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{tp\mathrm{Re}(\lambda+1)} \int_{\Sigma_-} |B_- f|^p \, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r})| \, d(\sigma \times \omega) \, dt.$$

Il primo integrale al secondo membro converge se e solo se $f(\vec{r}, \vec{\Omega})=0$ per q.o. $(\vec{r}, \vec{\Omega}) \in V_\infty^+ \cap V_\infty^-$. Per quanto riguarda gli altri integrali, vediamo che

$$\int_0^{+\infty} e^{-tp\mathrm{Re}(\lambda+1)} \int_{\Sigma_+} |B_+ f|^p \, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r})| \, d(\sigma \times \omega) \, dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{tp\mathrm{Re}(\lambda+1)} \int_{\Sigma_-} |B_- f|^p \, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}(\vec{r})| \, d(\sigma \times \omega) \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-tp\mathrm{Re}(\lambda+1)} \| B_+ f \|^p \, dt + \int_0^{+\infty} e^{tp\mathrm{Re}(\lambda+1)} \| B_- f \|^p \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(e^{-tp\,\mathrm{Re}(\lambda+1)} + e^{tp\,\mathrm{Re}(\lambda+1)} \right) \| B_- f \| \, dt$$

che converge se e solo se $B_- f = 0$ per q.o. $(r, \Omega) \in \Sigma_-$. Ricordando che $\|B_+ f\| = \|B_- f\|$, anche $B_+ f$ è nulla q.d. su Σ_+. Pertanto $(\lambda - T) f=0$ se e solo se $f=0$ quasi dappertutto. Resta così dimostrato che $\sigma_p = \emptyset$.

(iii) L'operatore T: $L^p(DxS) \to L^p(DxS)$ è un operatore lineare chiuso definito denso e perciò $\sigma_r T = \sigma_p (T')$ ([4], prop. 2.2, pg. 64), essendo T' l'operatore aggiunto definito da

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T') = \{\phi \in L^q(D \times S),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 : \Omega \cdot \nabla\phi - \phi \in L^q(D \times S) ; B_+\phi = J B_-\phi \} \\ T'\phi = \Omega \cdot \nabla\phi - \phi\ . \end{cases}$$

Se p=1, l'operatore aggiunto T' è definito da

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T') = \{\phi \in L^\infty(D \times S) : \Omega \cdot \nabla\phi - \phi \in L^\infty(D \times S) ; B_+\phi = J B_-\phi \} \\ T'\phi = \Omega \cdot \nabla\phi - \phi\ . \end{cases}$$

otteniamo $\sigma_p (T') = \emptyset$ con lo stesso procedimento seguito in (ii).

(iv) Da (i), (ii) e (iii) segue immediatamente che $\sigma_c (T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\lambda = -1\}$.

4. IL SEMIGRUPPO GENERATO DA B.

Poiché T è il generatore infinitesimale del semigruppo di contrazioni $\mathcal{U}(t)$ e K è operatore limitato in X, l'operatore B:=T+K è il generatore infinitesimale del semigruppo fortemente continuo $\{\mathcal{W}(t); t \geq 0\}$ definito come segue:

$$\mathcal{W}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{U}_j(t) \quad , \quad \mathcal{U}_0(t) = \mathcal{U}(t) \ , \ \mathcal{U}_j(t) = \int_0^t \mathcal{U}(s) K \mathcal{U}_{j-1}(t-s) \, ds.$$

Essendo poi K e $\mathcal{U}$ (t) operatori positivi, $\{\mathcal{W}(t); t \geq 0\}$ risulta essere un semigruppo di operatori positivi.

Dalla disuguaglianza $\|\mathcal{W}(t)\| \leq e^{-(1-\|K\|)t}$, segue che $\{\mathcal{W}(t); t \geq 0\}$ è semigruppo di contrazioni se $\|K\| \leq 1$.

Pertanto sono vere le seguenti affermazioni:

(i) per ogni $f_0 \in \mathcal{D}(T)$ il problema astratto di Cauchy (2) ha soluzione unica data da

$$f(t) = \mathcal{W}(t) f_0;$$

(ii) se il dato iniziale è non negativo, la soluzione forte del problema (2) è anche essa non negativa;

(iii) l'applicazione $t \rightarrow \|f(t)\|$ è non crescente se $\|K\| \leq 1$;
(iv) se $1-\|K\|>0$ è $\|f(t)\| \leq e^{-(1-\|K\|)t}\|f_0\|$ e quindi $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Per quanto riguarda il semigruppo $\{\mathcal{W}(t);\ t\geq 0\}$ generato da B, si dimostra una ulteriore proprietà enunciata nel seguente

TEOREMA 3. *Il semigruppo $\{\mathcal{W}(t)\}$ è semigruppo irriducibile di operatori positivi.*

Dim. Ricordiamo che un semigruppo di operatori positivi $\{\mathcal{W}(t);\ t\geq 0\}$ su un lattice di Banach X si dice irriducibile se gli unici ideali chiusi invarianti rispetto a $\{\mathcal{W}(t);\ t\geq 0\}$ sono $\{0\}$ e X.

Gli ideali chiusi di X hanno la forma:

$$\mathcal{I}_E = \{f \in X : f(\vec{r}, \vec{\Omega}) = 0 \text{ per q.o. } (\vec{r}, \vec{\Omega}) \in DxS\backslash E\}.$$

dove E è un sottoinsieme misurabile di DxS.

Un ideale chiuso è $\mathcal{W}$-invariante se e solo se lo è sia per $\mathcal{U}$ che per K ([12], p. 307 prop. 3.3).

Pertanto è sufficiente mostrare che se $\mathcal{I}_E$, con η (E) > 0, è invariante sia per $\mathcal{U}$ che per K, segue necessariamente E = DxS.

Poiché $k(\vec{r}, \vec{\Omega}', \vec{\Omega})>0$, $\mathcal{I}_E$ sarà invariante per l'operatore K solo se $E = D_0xS$, essendo D_0 un sottoinsieme misurabile di D con $\mu(D_0) > 0$.
Inoltre $\mathcal{I}_E$ è invariante per ogni $\mathcal{U}(t)$ solo se E è invariante per ogni traslazione

$(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rightarrow (\vec{r}-t\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$ con $0 \leq t < t\_$.

Pertanto D_0 deve coincidere con D, cioè $\mathcal{I}_E = X$.

BIBLIOGRAFIA

1. K.M. Case and P.F. Zweifel, *"Linear transport theory"*, Massachussets 1967.
2. S. Chandrasekhar, *"Radiative transfer"*, Dover, New York 1960.
3. E.B. Davies, *"One-parameter Semigroups"*, Academic Press, London 1980.
4. B. Davison, *"Neutron transport theory"*, Oxford University Press, London 1957.

5. J.J. Duderstadt and W.R. Martin, *"Transport theory"*, Wiley Interscience, 1979.
6. J.A. Goldstein, *"Semigroups of linear operators and applications"*, Oxford University Press, 1985.
7. E. Hille and R.S. Phillips, *"Functional analysis and semigroups"*, A.M.S. Coll. Publ., Providence, R. I., 1957.
8. J. Lehner e M.G. Wing, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 8, 217-234, (1955).
9. E.A. Milne, *"Handbuch der astrophysik"*, vol. 3, Springer Verlag, Berlin 1930.
10. R. Nagel, *"One-Parameter Semigroups of Positive Operators"*, L. N. n° 1184, Springer Verlag, Berlin 1986.
11. A. Pazy, *"Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations"*, Springer Verlag, 1983.
12. J.A. Van Casteren, *"Generators of strongly continuous semigroups"*, Research Notes in Mathematics vol. 115, Pitman, 1985.
13. J. Voigt, *"Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases"*, Habilitationsschrift, München 1980.