

UN MODELLO NEOKEYNESIANO DI EQUILIBRIO

Mauro Gallegati - Laura Gardini (*)

Sommario - Si presenta un modello postkeynesiano, ottenuto integrando l'impostazione marshall-minskiana con la determinazione kaleckiana dei profitti e con la teoria monetaria di Keynes. Si discute il modello non lineare alle differenze finite proposto e se ne esegue l'analisi parametrica, che permette di individuare un comportamento dinamico di carattere classico. Si determinano le condizioni di esistenza di un unico punto di equilibrio economicamente significativo, condizioni sufficienti di stabilità asintotica, e si commentano i risultati da un punto di vista economico.

1. INTRODUZIONE

La teoria dell'instabilità finanziaria di Minsky (1975, 1982) riprende una tradizione nella modellistica economica che può essere fatta risalire a Marshall. Secondo tale approccio, la stabilità dell'economia reale può essere modificata dalla parte monetaria, mediante creazioni di credito che permettono di espandere gli investimenti al di là del limite imposto dall'autofinanziamento. La scuola marshalliana e lo stesso Keynes enfatizzano più volte come un disordine creditizio si ripercuota sul funzionamento "tranquillo" dell'economia reale. In "The Economics of Industry" (1979, p. 119), Marshall analizza un tipico ciclo economico in cui il credito facile non è la causa della crescita, dovuta ad un evento esogeno, ma il fattore che trasforma la fase ascendente in "boom" e finisce poi per provocare la successiva recessione. La causa essenziale del ciclo è spesso oggetto di controversia tra i vari autori della scuola di

(*) Istituto di Scienze Economiche, Facoltà di Economia e Commercio, Università degli studi di Urbino.

Lavoro presentato al "Convegno di Matematica Applicata all'Economia e all'Ingegneria", Pescara, gennaio 1989; ed in parte realizzato con i contributi del M.P.I.

Cambridge, mentre un sostanziale accordo esiste sul fatto che la struttura finanziaria influenzi il comportamento ciclico dell'economia, secondo le ipotesi avanzate da Marshall.

A differenza dei contributi di Hayek (1931) e delle scuole monetariste (Sargent (1979), Friedman (1968), Lucas (1987)), la stabilità dei modelli "marshall-minskiani" non possiede quelle caratteristiche di ottimalità che dovrebbero discendere dall'applicazione dei teoremi Arrow-Debreu (Arrow-Hahn (1971), Debreu (1959)). I valori di equilibrio non sono "naturali", nel senso che interventi di politica economica sono in grado di migliorare in maniera permanente il loro livello.

Questo risultato si può ottenere ribaltando l'impostazione dell'approccio tradizionale che cerca di microfondare la struttura macroeconomica. In questo lavoro si è seguita la metodologia keynesiana. Essa consiste nel distinguere due fasi nello studio dei problemi economici: quello principale deve risolvere la determinazione dei vincoli di bilancio, quello secondario si occupa della distribuzione dei redditi individuali. In particolare, nel modello viene integrata l'impostazione "marshall-minskiana" con la determinazione kaleckiana dei profitti e con la teoria monetaria di Keynes. Questo permette di individuare un comportamento dinamico di carattere classico, espresso dalla convergenza ad uno stato stazionario. A differenza dello stato stazionario neo-classico, questa soluzione di lungo periodo non garantisce la piena occupazione del fattore lavoro (se non "by design or accident"). Il punto di equilibrio è infatti determinato dai particolari lavori dei parametri del modello, mentre

l'equilibrio di piena occupazione richiede che la domanda aggregata (nonché le previsioni imprenditoriali della medesima) intersechi l'offerta aggregata esattamente in corrispondenza del massimo livello di occupazione che i lavoratori accettano al salario atteso dagli imprenditori, che è il salario in base al quale viene definita la curva di offerta aggregata appropriata (Chick (1982), pag. 134).

Il presente lavoro è costituito da due parti: la descrizione ed il significato economico del modello proposto, e l'analisi parametrica del sistema.

Nel prossimo paragrafo ricaviamo la curva IS come luogo dei punti di equilibrio tra risparmi e investimenti nel piano profitti-prezzo del capitale, ed una curva LM che, nel medesimo piano, rappresenta l'insieme dei punti in cui la domanda uguaglia l'offerta. Si viene così ad avere un sistema non lineare alle differenze finite, la cui analisi qualitativa è sviluppata nel paragrafo 3. Si forniscono condizioni di esistenza e di stabilità di un unico punto di equilibrio economicamente significativo. Si discutono nelle conclusioni i risultati ottenuti.

2. DESCRIZIONE DEL MODELLO

2.1. L'EQUAZIONE IS

Dalle equazioni di contabilità nazionale abbiamo che in un'economia chiusa agli scambi con l'estero il reddito, Y , è pari a

$$Y_t = C_t + I_t + \bar{G} \quad (1)$$

dove $\bar{G} = G_c + G_I$, esogeno, rappresenta la spesa pubblica.

I consumi privati, C , sono determinati alla Kaldor (1955) dalla

$$C_t = (1-\tau) (cwN + c' (1-\theta) \pi_{t-1}) \quad (2)$$

dove c e c' (con $0 < c < 1$, e $0 < c' < 1$) sono, rispettivamente, le propensioni al consumo dei salariati e dei percettori di profitto; θ il tasso di ritenzione dei profitti; π ; w rappresenta il saggio unitario di salario; N , l'occupazione complessiva, e τ ($0 < \tau < 1$), l'aliquota media di imposizione fiscale diretta. In particolare:

$$N = N_c + N_I \quad (3)$$

$$N_c = (C + G_c) / p\lambda_c, \quad N_I = (I + G_I) / p\lambda_I \quad (4)$$

$$w/p = \lambda' \quad (5)$$

dove N_I e N_c , rappresentano, rispettivamente, l'occupazione complessiva nei due settori beni di investimento e di consumo; λ_I e λ_c le produttività medie del lavoro nei due settori, che per semplicità assumiamo identiche, $\lambda_I = \lambda_c = \lambda$; λ' è la produttività marginale del lavoro stesso e p il prezzo della produzione corrente. Data la sommatoria delle singole curve di produttività marginale (derivabile dalla (5)), sarà la domanda aggregata a determinare il livello di occupazione corrispondente al punto di domanda effettiva.

I modelli post-Keynesiani si caratterizzano poi per avere due distinti livelli dei prezzi; abbiamo pertanto l'equazione del prezzo della produzione corrente

$$p = w (1 + \mu) / \lambda \quad (6)$$

dove μ è il "mark-up" unitario, per semplicità assumiamo che questo sia identico nei due settori, $\mu_I = \mu_c = \mu$.

Il mercato del lavoro è modellato in maniera tale che, pur rispettando il principio di massimizzazione del profitto, per cui il salario reale è pari

alla produttività marginale del lavoro, l'ammontare complessivo di occupazione, N^* , viene ad essere determinato dal punto di domanda effettiva, ED, come intersezione tra le curve di domanda, AD, e di offerta aggregata, AS, determinata dal prodotto $p\lambda N^d$, come risulta dalla Fig. 1 (si veda Chick (1982), pag. 253, ed il "Symposium" nel "Journal of Post Keynesian Economics", (1987)). Poiché in tale punto la curva di domanda ha una pendenza, determinata dalla propensione al consumo, minore di quella dell'offerta, l'equilibrio è stabile pur in presenza di disoccupazione involontaria. La produzione si "adegua", almeno nel breve periodo, al livello della domanda aggregata attesa che però, anche in presenza di aspettative razionali, non può essere esattamente prevista. Questo è imputabile al fatto che il tempo di produzione dei beni di investimento richiede un orizzonte temporale più lungo rispetto a quello delle merci disponibili, e che quindi ogni singolo operatore deve formare le proprie aspettative sulle aspettative degli altri, inficiando in tal modo il processo di convergenza all'"equilibrio di aspettative razionali" (si veda Frydman-Phelps (1983)).

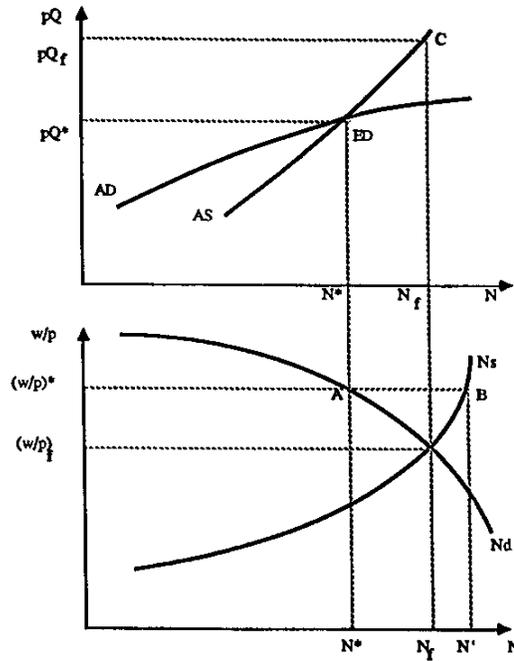


Fig. 1

L'offerta aggregata determina il punto (di domanda effettiva) sulla funzione di domanda aggregata, che mette in relazione la domanda di lavoro col salario reale che massimizza i profitti attesi, al quale le imprese decidono di operare. Se si vuole individuare una causa prima nella disoccupazione essa va dunque ricercata nell'insufficiente domanda aggregata piuttosto che in un salario reale "troppo elevato".

In quanto segue, assumiamo che tanto i salari quanto il capitale, siano esogeni nel breve periodo, definito come periodo coperto dall'accordo salariale contrattuale. Con queste assunzioni le decisioni degli imprenditori si limitano a:

- i) stabilire il livello degli investimenti, e quindi del reddito complessivo;
- ii) fissare i prezzi, tenuto conto delle condizioni di mercato, determinando in tal modo la distribuzione del reddito.

La funzione degli investimenti è definita dalla

$$I_t = a (V_t - p_t) + bIF_t \tag{7}$$

dove $(V_t - p_t)$ svolge una funzione analoga alla "q" di Tobin (1968, 1969), con V prezzo dello stock di capitale, e p_t , prezzo dell'investimento corrente, che assumiamo uguale a p : $p_t = p$; IF_t rappresenta l'autofinanziamento, ed i due coefficienti sono positivi: $a > 0$ e $0 < b < 1$. Il prezzo dei beni di investimento e di consumo viene ad essere determinato secondo la regola kaleckiana del "mark up", dato il livello del salario nominale corrente, il grado di monopolio, la fase ciclica ed il livello della produttività. La Fig. 2 mostra graficamente la formulazione minskiana della teoria dell'investimento riferita ad una singola unità produttiva. Rispetto alla versione standard della IS-LM, che assume una relazione negativa tra investimenti e tasso di interesse, Minsky enfatizza la visione keynesiana di un carattere essenzialmente di tipo finanziario e speculativo che la detenzione di attività e l'investimento privato hanno in una moderna economia capitalistica, Minsky (1975).

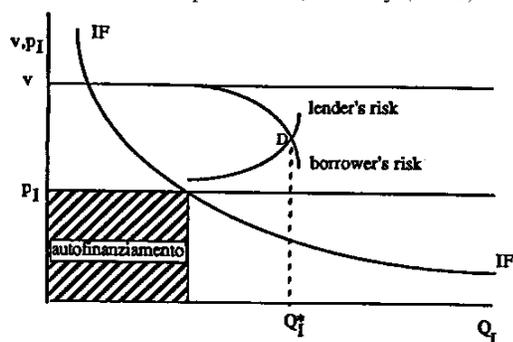


Fig. 2

L'equazione (7) rappresenta in forma lineare la formalizzazione della teoria finanziaria dell'investimento di Minsky. Il primo argomento nella funzione di investimento rappresenta la distanza verticale tra il prezzo dei "capital assets" e quello dell'investimento corrente. Nell'interpretazione di Minsky, la condizione $V > p$ rappresenta un "requisito di vitalità del sistema". Il rapporto tra EF ed il secondo argomento, IF, rappresenta il grado di "leverage", L, che comprende sia il "borrower's" che il "lender's risk" (sulla definizione di rischio del debitore e del creditore si veda Keynes (1936), pag. 112 ss). Durante una fase espansiva ci si può attendere tanto che lo stock di "leverage" diminuisca grazie all'aumento del corso delle azioni (salvo poi registrare un, possibilmente brusco, aumento dello stesso a seguito di una caduta dei prezzi delle emissioni azionarie), quanto che esso aumenti, come ipotizza Minsky (1982).

Si noti che, mentre un aumento del prezzo dei "capital assets" o dei profitti provoca un aumento dell'investimento, l'aumento del "leverage" ne causa una diminuzione rendendo più rigide le curve di rischio del debitore e del creditore. A sua volta il grado di indebitamento è funzione di V e π . Ma, mentre il "leverage" diminuisce senz'altro al crescere del prezzo dei "capital assets", più controverso è il caso in cui a crescere siano i profitti. Questi, da un lato consentono un maggior peso dell'autofinanziamento sul totale degli investimenti, dall'altro, se la propensione marginale ad investire è maggiore della propensione media, comporta un aumento del "leverage" al crescere dei profitti.

La teoria della fragilità sistemica si basa su quest'ultimo assunto. Durante la fase iniziale di un periodo di espansione, le imprese si indebitano in misura crescente, basandosi sulla prosperità che attualmente sperimentano. Le banche condividono lo stesso ottimismo e ottenere credito diviene più facile. Una sorta di circolo "virtuoso" si instaura: la remissione dei debiti conferma la bontà delle decisioni assunte in precedenza e interagisce sulle nuove richieste di finanziamento; è un processo di crescita cumulativo che ricorda molto da vicino quello descritto da Marshall e che finisce con lo sfociare in una crisi o in una recessione, a seconda dell'andamento delle aspettative degli operatori. In pratica, senza un organismo di coordinamento, sia esso un "Ministro della produzione" che pianifichi l'attività di investimento, o una Banca Centrale in grado di valutare l'andamento del grado di indebitamento, ogni singolo operatore tenderebbe ad indebitarsi in maniera crescente all'incremento dei profitti.

Il finanziamento interno IF_t è dato da

$$IF_t = \theta (1 - \tau) \pi_{t-1} \quad (8)$$

ed il finanziamento esterno, EF_t (l'impresa ha accesso a fonti esterne

soltanto domandando "finance"), da

$$EF_t = I_t - IF_t \quad (9)$$

Deriviamo ora la curva IS come luogo dei punti in cui i risparmi uguagliano gli investimenti. Usando (8), la (7) diviene:

$$I_t = a (V_t - p) + b \theta (1 - \tau) \pi_{t-1} \quad (10)$$

ed usando (3, 4, 6), la (2) diventa:

$$C_t = (1 - \tau) (\bar{G} + I_t + (1 + \mu) c' (1 - \theta) \pi_{t-1}) / \beta_o \quad (11)$$

dove si è definito

$$\beta_o = 1 + \mu - c (1 - \tau)$$

Da (1), utilizzando la relazione

$$Y_t = W_t + \pi_t = wN + \pi_t \quad (12)$$

otteniamo

$$\pi_t = C_t + I_t + \bar{G} - wN$$

ed usando (3, 4, 6)

$$\pi_t = (C_t + I_t + \bar{G}) \mu / (1 + \mu)$$

sostituendo in quest'ultima C_t ed I_t date rispettivamente in (11) e (10), otteniamo l'equazione IS:

$$\pi_t = \phi_o + \phi_1 V_t + \phi_2 \pi_{t-1}; \quad (13)$$

$$\begin{cases} \phi_o = (\bar{G} - ap) \mu / \beta_o & (>0) \\ \phi_1 = a \mu / \beta_o & (>0) \\ \phi_2 = (1 - \tau) (b \theta + c' (1 - \theta)) \mu / \beta_o & (>0) \end{cases} \quad (14)$$

2.2 L'EQUAZIONE LM

Integrando la teoria monetaria del "Treaties on Money" e della "General Theory", alla luce del successivo dibattito sulla "scuola svedese" (Ohlin (1973), Keynes (1973b, 1938)), si possono distinguere tre tipi di domanda di moneta:

- (i) la domanda transattiva, TR, ("active balances") a cui, per semplificare, assimiliamo la domanda per scopi precauzionali;
- (ii) la domanda speculativa, SP, ("hoards" o "inactive balances");
- (iii) la domanda di "finance" (Keynes (1937a), Asimakopoulos (1985)).

L'offerta di moneta viene ad essere determinata dalla base monetaria, H, emessa dalla banca centrale e dal moltiplicatore, $m = (1 + cu)/(re + cu)$, dove "cu" è pari al rapporto tra circolante e depositi, e "re" a quello tra riserve e depositi. Poiché entrambi riflettono le preferenze degli operatori e delle banche durante il ciclo, la quantità di moneta può essere determinata endogenamente (Minsky (1975)).

Vanno segnalate alcune differenze rispetto alla teoria tradizionale. In primo luogo la direzione di causalità moneta-reddito va qualificata. In base alla teoria keynesiana del "finance" è l'ammontare di produzione stabilito dalle imprese che "domanda" moneta, anche se, per via dei tempi tecnici di produzione, lo stock di moneta cresce prima del reddito. Non si ha quindi quell'effetto propulsivo proveniente dal settore monetario, teorizzato dalla scuola di Chicago. E' evidente come una politica monetaria restrittiva, tagliando le disponibilità di credito all'economia tramite un razionamento dello stesso, finisca con l'influenzare il sentiero e la velocità di accumulazione fino ad aggravare, ed in determinate circostanze provocare, una situazione di recessione.

In secondo luogo, una volta stabilito che l'aggiustamento fra investimenti e risparmi avviene attraverso variazioni dell'occupazione, anziché tramite cambiamenti nel tasso di interesse, si deve riconoscere che

il tasso di interesse non può essere determinato dalla domanda e dall'offerta di capitale, perché l'investimento provoca un uguale ammontare di risparmio. Quindi l'investimento "finanzia se stesso", qualunque sia il livello del tasso di interesse (Kalecki (1954), pag. 73).

Le determinanti del saggio di interesse vanno dunque ricercate altrove: segnatamente nel carattere sequenziale di un processo economico che si svolge in condizioni di incertezza.

La scuola monetarista propende a considerare esogena la quantità di moneta, o comunque determinata dalle decisioni delle autorità monetarie, mentre il filone post-keynesiano statunitense (cfr. Moore (1988)) ritiene completamente indeterminata la stessa per via delle erogazioni creditizie infraimprese. In questo scritto assumiamo esogena la quantità

complessiva della stessa. In quanto determinata dall'incontro tra le domande degli operatori e l'offerta di base monetaria aumentata per l'operare del moltiplicatore, la si può considerare di ammontare finito, mentre endogeno è il tasso di interesse.

Secondo la tradizione di Cambridge la domanda di moneta transattiva è una funzione lineare del reddito nominale disponibile; la seguente definizione

$$TR_t = k Y_t - \beta r_t \quad (15)$$

esprime la domanda transattiva come funzione decrescente del tasso di interesse per dato livello di reddito. Poiché k , $0 < k < 1$, dipende dalle abitudini e dallo stato generale di fiducia, la (15) è una funzione potenzialmente molto instabile (Roe (1973)).

La domanda speculativa è la somma di tutte le domande individuali. Seguendo il "Treatise", nel quale Keynes delinea una teoria della "propensity to hoard" o del "degree of bearishness" analiticamente compatibile con la nozione di preferenza per la liquidità sviluppata nella "General Theory", definiamo ciascuna funzione di domanda individuale come (si veda Delli Gatti (1987))

$$SP_j = \alpha_j (V - V^c); \alpha_j > 0 \text{ per } j = 1, \dots, n$$

dove V_j è il prezzo atteso del "capital asset" dall'unità j -esima.

Dalla sommatoria delle singole domande individuali si ricava la domanda complessiva

$$SP_t = \sum_{j=1}^n SP_j = h (V_t - V^c); h = \sum_{j=1}^n \alpha_j \quad (16)$$

La domanda di "finance" come funzione del "financing gap" delle imprese è espressa dalla (9). La domanda di moneta è così pari alla somma delle tre quantità:

$$M_t^d = EF_t + SP_t + TR_t \quad (17)$$

mentre l'offerta è data dalla

$$M_t^s = \bar{M} = H m \quad (18)$$

L'equilibrio nel mercato della moneta è dato dalla

$$M_t^s = M_t^d \quad (19)$$

In un modello con due “assets” moneta ed azioni abbiamo in equilibrio la seguente equazione di arbitraggio

$$r_t = ((1 - \theta) \pi_{t-1} + \pi^c) / V_t \quad (20)$$

Ricaviamo ora l’equazione che chiamiamo LM. Dalla (19), usando (18), (17), e le definizioni dei termini che in essa compaiono date in (9, 15, 16), otteniamo

$$\bar{M} = I_t - \theta (1 - \tau) \pi_{t-1} + h(V_t - V^c) + kY_t - \beta r_t \quad (21)$$

Dalla (12), usando (3, 4, 6), otteniamo

$$kY_t = k\pi_t + (\bar{G} + I_t + (1 - \tau) c' (1 - \theta) \pi_{t-1}) k / \beta_0 \quad (22)$$

Sostituendo I_t e kY_t , dati rispettivamente in (7) e (22), nella (21) si ottiene, esplicitando π_t , la seguente equazione LM:

$$\pi_t = \gamma_0 + \gamma_1 V_t + \gamma_2 \pi_{t-1} + \gamma_3 r_t \quad (23)$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = (M + hV^c + ap) / k - \varphi_0 / \mu & (>0) \\ \gamma_1 = - (a + h) / k - \varphi_1 / \mu & (>0) \\ \gamma_2 = \theta (1 - \tau) (1 - b) / k - \varphi_2 / \mu & (<< 0) \\ \gamma_3 = \beta / k & (>0) \end{cases} \quad (24)$$

3. ANALISI DEL MODELLO

3.1 RIDUZIONE AD UNA MAPPA

Le equazioni che costituiscono il modello che vogliamo studiare sono dunque la (13) e la (23) con la (20), che riscriviamo per comodità

$$\begin{cases} \pi_t = \varphi_0 + \varphi_1 V_t + \varphi_2 \pi_{t-1} \\ \pi_t = \gamma_0 + \gamma_1 V_t + \gamma_2 \pi_{t-1} + \gamma_3 r_t \\ r_t = ((1 - \theta) \pi_{t-1} + \pi^c) / V_t \end{cases} \quad (25)$$

con i seguenti vincoli sui coefficienti:

$$\begin{cases} \theta \in [0, 1]; \pi^c, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 > 0 \\ \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_2 << 0, \gamma_3 \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

Si osserva immediatamente che se $\gamma_3 = 0$ (oppure r è costante), il modello si riduce ad una mappa lineare:

$$\pi_t = \lambda \pi_{t-1} + \eta \quad ; \quad (27)$$

$$\lambda = \frac{\varphi_1 \gamma_2 - \varphi_2 \gamma_1}{\varphi_1 - \gamma_1} \quad , \quad \eta = \frac{\varphi_1 \gamma_0 - \varphi_0 \gamma_1}{\varphi_1 - \gamma_1} + \left(\frac{\gamma_3 \varphi_1 r}{\varphi_1 - \gamma_1} \right) \quad (28)$$

che discutiamo brevemente. Il punto di equilibrio della (27), per $\lambda \neq 1$, è dato da $\pi^* = \eta / (1 - \lambda)$. Dalle condizioni (26) segue $\eta > 0$, così che il punto di equilibrio è economicamente significativo, cioè $\pi^* > 0$, solo per $\lambda < 1$, ed è stabile per $-1 < \lambda < 1$. Tuttavia, il segno di λ è definito, in quanto nella (28) il denominatore è positivo, ed il segno della quantità al numeratore risulta dalla scrittura esplicita dei coefficienti in funzione dei parametri economici tramite le (14) e (24), e si ha:

$$(\varphi_1 \gamma_2 - \varphi_2 \gamma_1) > 0 \quad (29)$$

Quindi, se teniamo conto del vincolo (29), cioè $\lambda > 0$, possiamo concludere che la mappa lineare (27) ha un punto di equilibrio economicamente significativo nel dominio $0 < \lambda < 1$, che è (globalmente e asintoticamente) stabile con transitori di tipo monotono (sono escluse le oscillazioni improprie, cioè gli andamenti alternanti).

Consideriamo in seguito il sistema (26) con $\gamma_3 > 0$. Per ridurre il modello ad una mappa scritta in forma standard, cioè a una equazione non lineare alle differenze finite in forma esplicita,

$$\pi_t = f(\pi_{t-1}) \quad (30)$$

sono necessari alcuni passaggi algebrici. Dall'uguaglianza delle prime due equazioni in (25), ed usando la terza, si ottiene la seguente equazione del secondo ordine per V_t :

$$(\varphi_1 - \gamma_1) V_t^2 - [(\gamma_0 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \gamma_2) \pi_{t-1}] V_t - \gamma_3 ((1 - \theta) \pi_{t-1} + \pi^e) = 0 \quad (31)$$

il cui discriminante, dato da

$$\Delta(\pi) = [(\gamma_0 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \gamma_2) \pi]^2 + 4\gamma_3 (\varphi_1 - \gamma_1) ((1 - \theta) \pi + \pi^e) \quad (32)$$

è positivo se assumiamo $\pi_t > 0$ per ogni t (vedremo che si presenta effettivamente questo caso), per cui l'equazione (31) ha due radici reali di segno opposto (come segue dalla regola di Cardano). Denotiamo con V_1 la radice positiva,

$$V_t = [(\gamma_0 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \gamma_2) \pi_{t-1}] + \sqrt{\Delta(\pi_{t-1})} / 2 (\varphi_1 - \gamma_1) \quad (33)$$

che è la sola radice che interessa in questo modello economico.

Sostituendo la (33) nella prima di (25) otteniamo una mappa di tipo (30), con

$$f(\pi) = \frac{1}{2} \left[\varphi_0 + \frac{\varphi_1 \gamma_0 - \varphi_0 \gamma_1}{\varphi_1 - \gamma_1} \right] + \frac{1}{2} \left[\varphi_2 + \frac{\varphi_1 \gamma_2 - \varphi_2 \gamma_1}{\varphi_1 - \gamma_1} \right] \pi + \frac{\varphi_1}{2(\varphi_1 - \gamma_1)} \sqrt{\Delta(\pi)} \quad (34)$$

che rappresenta il modello dinamico di interesse. Si noti che se $\pi_0 > 0$, allora V_t e π_t sono positivi per ogni $t > 0$.

Interessa ora determinare, se esistono, i punti di equilibrio della mappa (34) che sono economicamente significativi, cioè $\pi^* > 0$ e tali che i corrispondenti valori di equilibrio V^* siano positivi; chiamiamo ammissibili tali punti. Vedremo sotto quali condizioni esiste un unico punto di equilibrio ammissibile, alcune condizioni di stabilità ed alcuni comportamenti qualitativi della mappa (34).

3.2 PUNTI DI EQUILIBRIO

I punti di equilibrio della mappa (30) sono date dalle soluzioni dell'equazione $f(\pi) = \pi$. Con ovvi passaggi algebrici otteniamo l'equazione del secondo ordine

$$\begin{aligned} (1 - \varphi_2) A \pi^2 - B \pi + C &= 0; & (35) \\ A &= (\varphi_1 - \gamma_1) - (\varphi_1 \gamma_2 - \varphi_2 \gamma_1) \\ B &= \varphi_3 (1 - \theta) \varphi_1^2 + \varphi_0 A + (1 - \varphi_2) (\varphi_1 \gamma_0 - \varphi_0 \gamma_1) \\ C &= \varphi_3 \pi^c \varphi_1^2 + \varphi_0 (\varphi_1 \gamma_0 - \varphi_0 \gamma_1) \end{aligned}$$

Le radici dell'equazione (35) sono punti stazionari del sistema (25), gli altri valori all'equilibrio sono:

$$V = ((1 - \varphi_2) \pi - \varphi_0) / \varphi_1, \quad r = ((1 - Q) \pi + \pi^c) / V \quad (36)$$

ed i punti ammissibili sono punti di equilibrio della mappa (34).

Proposizione 1. Esiste un unico punto di equilibrio ammissibile solo se

$$\varphi_2 < 1 \text{ e } A > 0 \quad (37)$$

dato da

$$\pi^* = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4(1 - \varphi_2) AC}}{2(1 - \varphi_2) A} \quad (38)$$

Dimostrazione. Dall'equazione (35) segue immediatamente che $\phi_2 < 1$ è una condizione necessaria. Infatti, se $\phi_2 = 1$ tale equazione ha una sola radice, positiva, ma il corrispondente valore di V all'equilibrio è negativo, mentre se $\phi_2 > 1$, dalla (36) segue che, all'equilibrio, o V o π è negativo, in ogni caso non ammissibile.

Assumiamo quindi $\phi_2 < 1$, interessa ora vedere se le radici dalla (35) sono reali e positive. A questo scopo, riscriviamo le equazioni in (25) nella forma seguente

$$(IS) \quad \begin{cases} \pi_t = \phi_0 + \phi_1 V_t + \phi_2 \pi_{t-1} \\ \gamma_3 r_t = (\phi_0 - \gamma_0) + (\phi_1 - \gamma_1) V_t + (\phi_2 - \gamma_2) \pi_{t-1} \\ r_t V_t = (1-\theta) \pi_{t-1} + \pi^e \end{cases} \quad (39)$$

che ci consente una interpretazione geometrica, utile sia per considerazioni dinamiche che all'equilibrio. Infatti, all'equilibrio, dalla prima equazione si ottiene che l'espressione per V_t data in (36) diventa, sostituendovi V_t ,

$$r = \frac{A}{\gamma_3 \phi_1} \pi - \frac{(\phi_1 \gamma_0 - \phi_0 \gamma_1)}{\gamma_3 \phi_1} \quad (40)$$

$$r\pi = \frac{\gamma_0}{(1-\phi_2)} r + \frac{(1-\theta)\phi_1}{(1-\phi_2)} \pi + \frac{\pi^e \phi_1}{(1-\phi_2)} \quad (41)$$

I valori di equilibrio sono dati geometricamente, nel piano (π, r) , dall'intersezione della retta di equazione (40) con l'iperbole di equazione (41). Siccome tutti i coefficienti dell'equazione (41) sono positivi, il grafico dell'iperbole, i cui asintoti sono le rette di equazione $\pi = \phi_0/(1-\phi_2)$ ed $r = (1-\theta)\phi_1/(1-\phi_2)$, è qualitativamente simile a quello riportato in Fig. 3. Il termine noto nell'equazione della retta (40) è negativo, e se $A \leq 0$ i valori di equilibrio di π sono minori di $\phi_0/(1-\phi_2)$ così che, come prima, o V o π è negativo, ossia inammissibili. Segue che la condizione $A > 0$ è necessaria per avere un punto di equilibrio ammissibile. La sufficienza della (37) segue immediatamente delle proprietà geometriche delle curve (40) e (41) infatti, vi sono due intersezioni reali e solo quella con $\pi > \phi_0/(1-\phi_2)$ è ammissibile. Possiamo quindi concludere che se vale la (37), l'equazione (35) ha due radici reali, la maggiore delle quali, data in (38), fornisce il punto di equilibrio, e la dimostrazione è completa.

In seguito assumeremo che le condizioni in (37) siano soddisfatte.

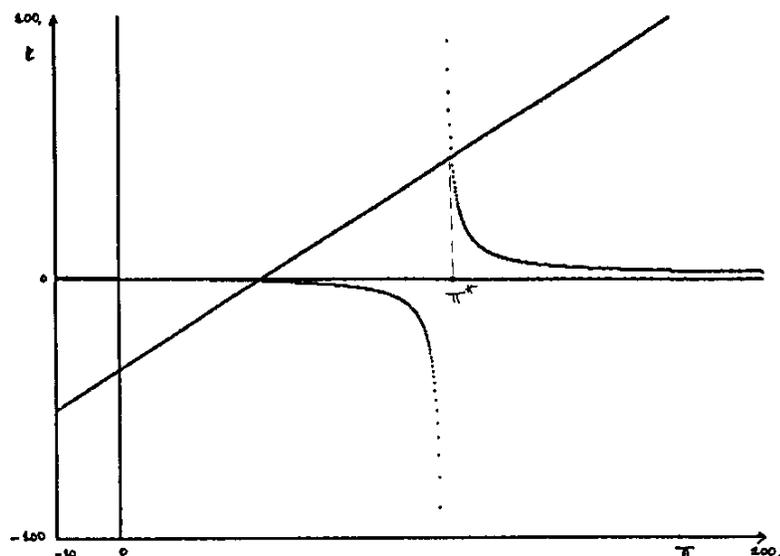


Fig. 3

Osservazione 1. Considerando la famiglia di mappe $f(\pi)$ in funzione del parametro γ_2 , si nota che nell'interpretazione geometrica (40) - (41) del punto di equilibrio ammissibile, il solo parametro che varia è la pendenza della retta. Diminuendo γ_2 , la pendenza aumenta ed il punto di equilibrio π^* (γ_2) diminuisce, al limite si ha

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow -\infty} \pi^*(\gamma_2) = \varphi_0 / (1 - \varphi_2) \quad (42)$$

3.2 ALCUNE OSSERVAZIONI QUALITATIVE

Il comportamento locale della mappa $f(\pi)$, cioè per condizioni iniziali prossime al valore di equilibrio π^* , può dipendere dalle proprietà di stabilità locali di tale punto. Per esempio, è ben noto che se π^* è stabile (i. e. $|f'(\pi^*)| < 1$), allora gli iterati π_i convergono a π^* monoticamente o con oscillazioni improprie, a seconda del segno di $f'(\pi^*)$.

Nel caso in esame si ha, da (34) e (33):

$$f'(\pi) = \varphi_2 + \varphi_1 V'(\pi) \quad (43)$$

dove

$$V'(\pi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{\varphi_2 - \gamma_1}{\varphi_1 - \gamma_1} [(\varphi_0 - \gamma_0) + (\varphi_2 - \gamma_2) \pi] + 2\gamma_3(1-\theta)}{\sqrt{\Delta(\pi)}} - \frac{\varphi_2 - \gamma_2}{\varphi_1 - \gamma_1} \right\} \quad (44)$$

che deve essere valutata in π^* , dato in (38). Nel seguito useremo anche le seguenti espressioni

$$V'(\pi^*) = \frac{\gamma_3(1-\theta) - V^*(\varphi_2 - \gamma_2)}{\sqrt{\Delta(\pi^*)}} \quad (45)$$

$$V'(\pi^*) = \left\{ \gamma_3(1-\theta) - (\varphi_2 - \gamma_2) [(1 - \varphi_2) \pi^* - \varphi_0] / \varphi_1 \right\} \frac{1}{\sqrt{\Delta(\pi^*)}} \quad (46)$$

che si ottengono dalla (44) usando rispettivamente (33) e (36).

E' chiaro che il segno di $f'(\pi^*)$ non è immediatamente leggibile, tuttavia con ragionamenti qualitativi di tipo geometrico, si può vedere che i due tipi di transitorio (monotono e alternante) possono presentarsi entrambi. Assegnato π_{t-1} , il sistema (39) può leggersi nel piano (V, r) come l'intersezione di una retta con una iperbole, la cui soluzione ammissibile fornisce il valore V_t da usare nell'equazione IS per calcolare π_t , e così via. Se risulta $\pi_t > \pi_{t-1}$ allora nel successivo sistema da risolvere sia l'iperbole che la retta sono (parlando rozzamente), "spostate verso l'alto", ma il nuovo valore di V può essere maggiore o minore del precedente, a seconda delle "deviazioni relative", e quindi π_t può essere maggiore o minore di π_{t-1} . In modo analogo si ragiona se $\pi_t < \pi_{t-1}$.

A scopo illustrativo, consideriamo la famiglia di mappe a un parametro $f(\pi, \gamma_2)$, per fissati valori degli altri parametri, siano

$$\begin{cases} \theta = .5, \pi^c = 1, \varphi_0 = 10, \varphi_1 = .5, \varphi_2 = .8, \\ \gamma_0 = 800, \gamma_1 = -.4, \gamma_3 = .8 \end{cases} \quad (47)$$

In Fig. 4a si può vedere la mappa $f(\pi, .5)$, il cui punto di equilibrio π^* è stabile con $0 < f'(\pi^*) < 1$, ed in Fig. 4b la mappa $f(\pi, .2)$, in cui π^* è stabile con $-1 < f'(\pi^*) < 0$. L'andamento qualitativo del grafico della mappa $f(\pi)$ in quest'ultimo caso (cioè l'essere una funzione unimodale), suggerisce che il comportamento dinamico della mappa per i valori inferiori di γ_2 può essere più complesso di quello descritto precedentemente. Dalla teoria delle mappe unimodali (Collet-Eckmann (1980), Devaney (1986), Kelsey (1988)), sappiamo che se un punto di equilibrio π^* in funzione di un parametro (nel nostro caso γ_2) biforca con $f'(\pi^*) =$

- 1, e sono soddisfatte opportune condizioni di trasversalità (Guckenheimer-Holmes, teorema 3.5.1), allora per valori del parametro vicini al valore di biforcazione il punto di equilibrio è instabile, ed appare un'orbita di periodo due, diciamo C_2 , stabile.

Ci chiediamo se è possibile, nel nostro caso, una biforcazione di questo tipo (flip o raddoppiamento di periodo). Mostriamo che o non esistono, o ne esistono due. Infatti, osservando che per $\gamma_2 \rightarrow -\infty$ si ha $\forall^* \rightarrow 0$, da (42) e (36), e $\sqrt{\Delta(\pi^*)} \rightarrow \infty$ da (32), si ottiene infine, da (43),

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow -\infty} f'(\pi^*) = \varphi_2$$

Questo limite assicura che per valori di $|\gamma_2|$ sufficientemente grandi, π^* è stabile con $0 < f'(\pi^*) < 1$. Da ciò segue che se esiste un valore di biforcazione flip primario, sia γ_2^F (Forward bifurcation), tale che per $\gamma_2 > \gamma_2^F$ ($\gamma_2 < \gamma_2^F$) si ha $f'(\pi^*) > -1$ ($f'(\pi^*) < -1$), allora deve esistere un altro valore di biforcazione flip primario, sia γ_2^R (Reverse bifurcation), tale che per $\gamma_2 > \gamma_2^R$ ($\gamma_2 < \gamma_2^R$) si ha $f'(\pi^*) < -1$ ($f'(\pi^*) > -1$).

In Appendice A si dimostra che se esiste un'orbita di periodo 2 (stabile o instabile), i due valori dell'orbita, siano $\pi^{(1)}$ e $\pi^{(2)}$, sono le radici della seguente equazione

$$\pi^2 - S\pi + P = 0 \tag{48}$$

dove S e P sono dati in funzione dei parametri del modello.

Nell'esempio dato sopra, la mappa $f(\pi, -3)$ ha un punto di equilibrio instabile con $f'(\pi^*) < -1$, si veda la Fig. 5a, ed in Fig. 5b si mostra la mappa $f^2(\pi, -3)$ con un'orbita C_2 stabile.

Per quanto riguarda i valori di biforcazione si può osservare che ai valori di biforcazione flip, l'equazione (48) deve avere due radici coincidenti, cioè deve essere $S^2 - 4P = 0$, e scrivendo esplicitamente questa relazione di funzione di γ_2 si ottiene un'equazione del tipo

$$\eta_0 \gamma_2^2 + \eta_1 \gamma_2 + \eta_2 = 0 \tag{49}$$

Se il discriminante della (49) è positivo, allora i due valori di biforcazione flip sono le radici di tale equazione.

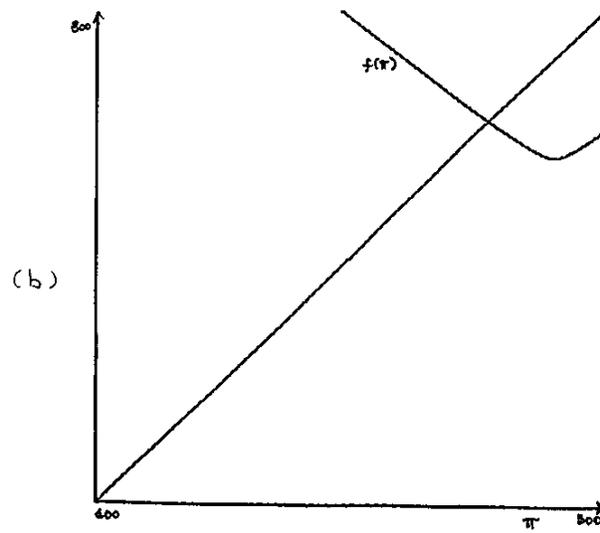
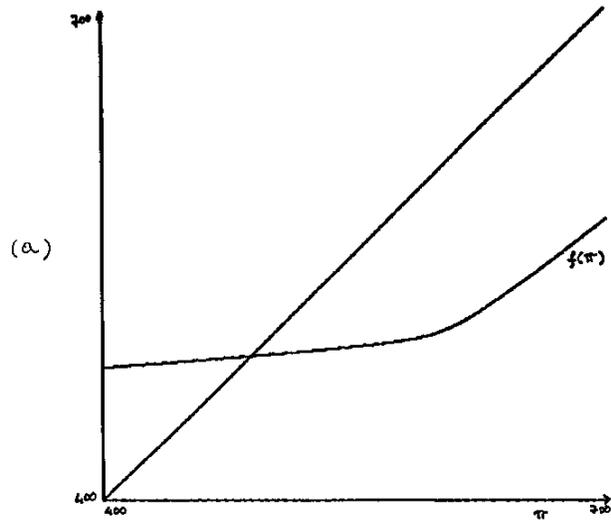


Fig. 4

Continuando con lo stesso esempio, le radici della (49) sono $\gamma_2^F = -2.5$, $\gamma_2^R = -13.16$. Diminuendo γ_2 in questo intervallo si sono trovate le successioni di biforcazioni flip "Forward" dell'orbita C_2 (in Fig. 6a si mostra un'orbita di periodo elevato a $\gamma_2 = -4.25$ ed in Fig. 6b un'orbita della mappa caotica a $\gamma_2 = -5$), di un'orbita C_3 , e di altre ancora, quindi le successioni di biforcazioni flip "Reverse" di diverse orbite fino ad una C_2 per γ_2 prossimo a γ_2^R , ed infine un punto di equilibrio stabile per $\gamma_2 < \gamma_2^R$.

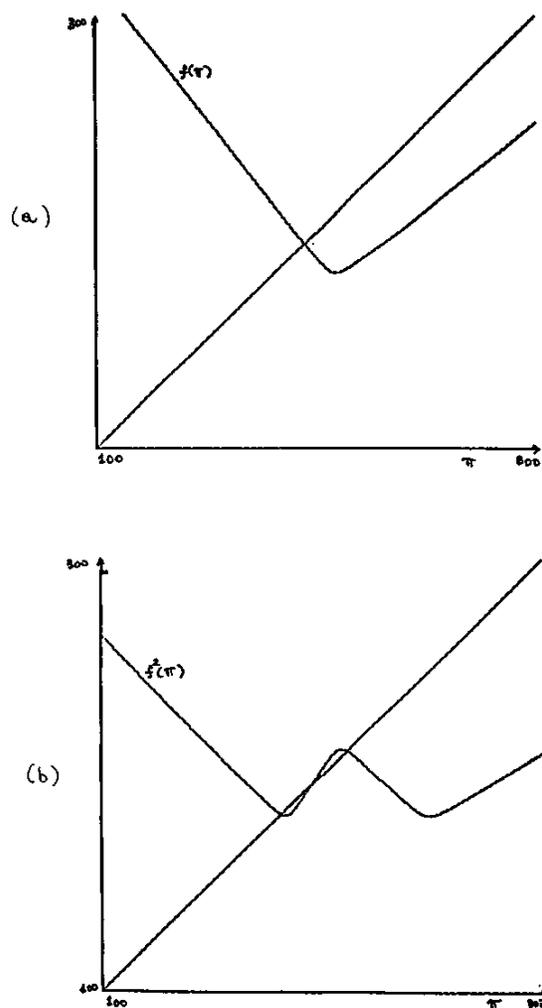


Fig. 5

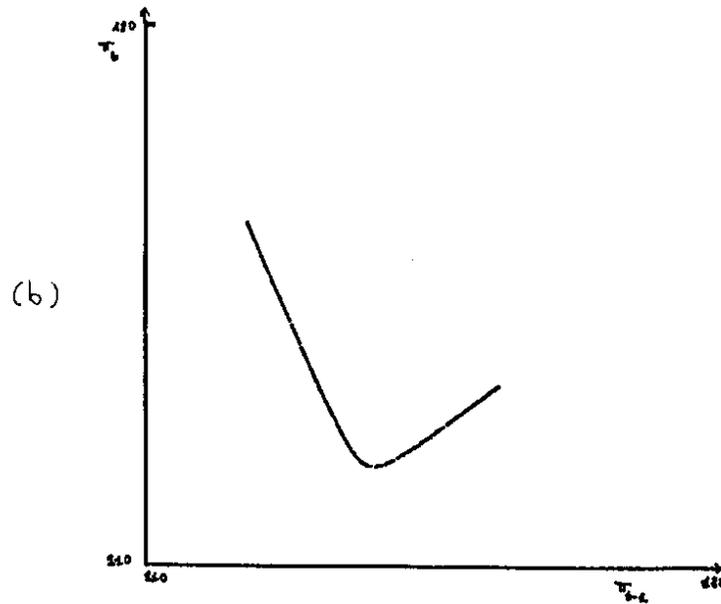
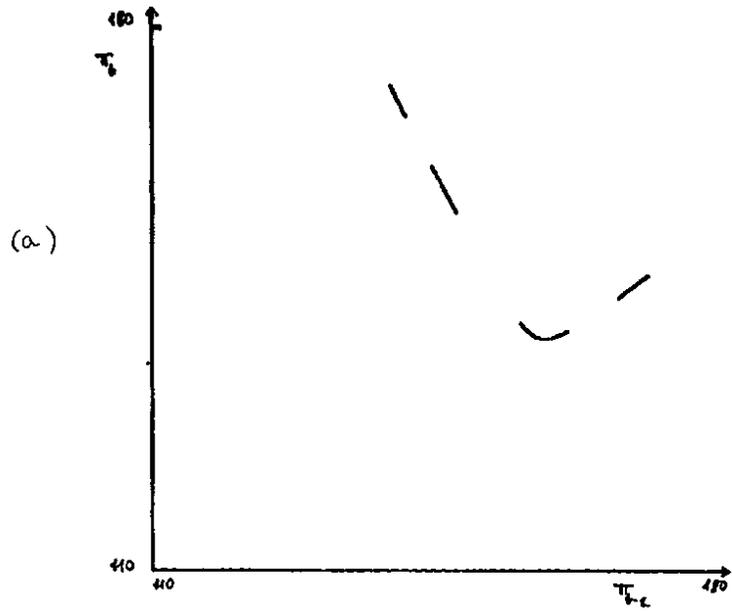


Fig. 6

Ci chiediamo se questo comportamento qualitativo è “generale” per la mappa $f(\pi)$ data in (34), e se dinamiche non standard di questo tipo si abbiano in corrispondenza di valori dei parametri che siano economicamente significativi. Risponderemo rigorosamente alla seconda domanda nella prossima sezione, e qualitativamente alla prima nell’ultima sezione.

3.4 CONDIZIONI DI STABILITÀ

E’ interessante fare un confronto fra il modello lineare discusso in 3.1 e quello non lineare. Per quest’ultimo, le condizioni di esistenza di un punto di equilibrio ammissibile sono:

$$\lambda < 1 \quad \text{e} \quad \varphi_2 < 1 \tag{50}$$

in quanto la condizione $A > 0$ è equivalente alla $\lambda < 1$, che è l’analogia condizione del modello lineare. Il “dominio di esistenza è quindi diminuito, tuttavia la restrizione non è rilevante nel modello in esame, in quanto da un punto di vista economico la condizione $\varphi_2 < 1$ può ritenersi quasi sempre soddisfatta.

Per quanto riguarda la stabilità, supposto che valgano le (50), si è visto che il modello lineare è stabile per $\lambda > -1$, ma economicamente significativo solo per $\lambda > 0$, per via del vincolo (29). Vedremo che, come il caso lineare, anche il modello non lineare ha un punto di equilibrio stabile con transitori di tipo monotono quando i parametri sono economicamente rilevanti. Allo scopo, premettiamo la seguente

Proposizione 2. Assumendo soddisfatte le (26) e (50):

$$\gamma_2 \leq \varphi_2 \Rightarrow \lambda < f'(\pi^*) \tag{51}$$

Infatti, per $\gamma_2 = \varphi_2$ si ha dalla (43), per sostituzione diretta,

$$\varphi_2 = \lambda < f'(\pi^*) = \varphi_2 + \varphi_1 \gamma_3 (1 - \theta) / \sqrt{\Delta(\pi^*)}$$

e per $\gamma_2 < \varphi_2$ si ha, usando (43) e (44),

$$\begin{aligned} \lambda < f'(\pi^*) &\Leftrightarrow V'(\pi^*) > -(\varphi_2 - \gamma_2) / (\varphi_1 - \gamma_1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\Delta(\pi^*)} + [(\varphi_0 - \gamma_0) + (\varphi_2 - \gamma_2) \pi^*] + 2 \gamma_3 (1 - \theta) \frac{\varphi_1 - \gamma_1}{\varphi_2 - \gamma_2} > 0 \end{aligned}$$

e l’ultima disuguaglianza è soddisfatta.

Dimostriamo ora la seconda condizione sufficiente per la stabilità

asintotica locale di π^* .

Proposizione 3. Assumendo soddisfatte le (26) e (50):

$$-1 + \gamma_1 (1 + \varphi_2) / \varphi_1 < \gamma_2 < \varphi_2 - \varphi_1 \gamma_3 (1 - \theta) \Rightarrow -1 < \lambda < f'(\pi^*) < 1 \quad (52)$$

Infatti, dalla (43) e (45) si ha:

$$\begin{aligned} f'(\pi^*) < \varphi_2 &\Leftrightarrow V'(\pi^*) < 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_3 (1 - \theta) < (\varphi_2 - \gamma_2) V^* \\ &\Leftrightarrow \gamma_3 \varphi_1 (1 - \theta) < (\varphi_2 - \gamma_2) [(1 - \varphi_2) \pi^* - \varphi_0] \end{aligned} \quad (53)$$

ed essendo $\pi^* > \varphi_0 / (1 - \varphi_2)$, abbiamo che

$$\gamma_2 < \varphi_2 - \varphi_1 \gamma_3 (1 - \theta) \Rightarrow f'(\pi^*) < \varphi_2 (< 1)$$

La dimostrazione è completa osservando che

$$\lambda > -1 \Leftrightarrow \gamma_2 > -1 + \gamma_1 (1 + \varphi_2) / \varphi_1$$

Le seguenti osservazioni sono utili per l'interpretazione economica del modello:

(I) La condizione $\gamma_2 < \varphi_1$ può ritenersi quasi sempre soddisfatta.

(II) Se nella Proposizione 3 aggiungiamo il vincolo (29), la (52) diventa:

$$\gamma_1 \varphi_2 / \varphi_1 < \gamma_2 < \varphi_2 - \varphi_1 \gamma_3 (1 - \theta) \Rightarrow 0 < \lambda < f'(\pi^*) < 1$$

(III) Se supponiamo che il vincolo $\gamma_2 < 0$ sia più realistico, allora la disuguaglianza in (53) è soddisfatta, ed una condizione sufficiente di stabilità è che sia $\lambda > -1$ (oppure $\lambda > 0$):

$$\begin{aligned} -1 + \gamma_1 (1 + \varphi_2) / \varphi_1 < \gamma_2 < 0 &\Rightarrow -1 < \lambda < f'(\pi^*) < 1 \\ \gamma_1 \varphi_2 / \varphi_1 < \gamma_2 < 0 &\Rightarrow 0 < \lambda < f'(\pi^*) < 1 \end{aligned}$$

(IV) Una condizione necessaria per l'esistenza di un'orbita di periodo due (e quindi di dinamiche locali non standard) è che sia $\lambda < -1$.

(V) Le condizioni sufficienti di stabilità date sopra non dipendono da φ_0 e γ_0 , tuttavia questi parametri influenzano i coefficienti dell'equazione (49), si può quindi concludere che φ_0 e γ_0 influenzano la stabilità di π^* solo nel dominio $\lambda < -1$. Per esempio, se il discriminante di tale equazione è negativo allora ci aspettiamo che non vi siano biforcazioni di tipo flip e quindi $f'(\pi^*) > -1$ per ogni γ_2 ammissibile (il limite superiore di γ_2 è determinato dal vincolo $\lambda < 1$).

3.5 RISULTATI NUMERICI

Riassumiamo brevemente i risultati dell'analisi svolta numericamente sulla famiglia $f(\pi)$ con i vincoli (26), (50) e $\varphi_1 < \varphi_2$. Si è investigato, con esperimenti numerici, il comportamento qualitativo delle famiglie $f(\pi, \gamma_2)$ per diversi valori di $(\gamma_0 - \varphi_0)$, diminuendo γ_2 dall'intervallo di stabilità dato nella Proposizione 3.

Si è trovato che per $(\gamma_0 - \varphi_0)$ inferiore ad un opportuno "valore di soglia", il punto di equilibrio è stabile per ogni $\gamma_2 < 0$. Un esempio con $\gamma_0 = 200$ (gli altri parametri sono dati in (47)) è riportato in Fig. 7a, dove si rappresenta l'intera famiglia $f(\pi, \gamma_2)$ con il grafico della funzione f' ($\pi^*(\gamma_2)$). (Si noti che a questi casi si applicano i ragionamenti fatti nell'osservazione (V) di cui sopra).

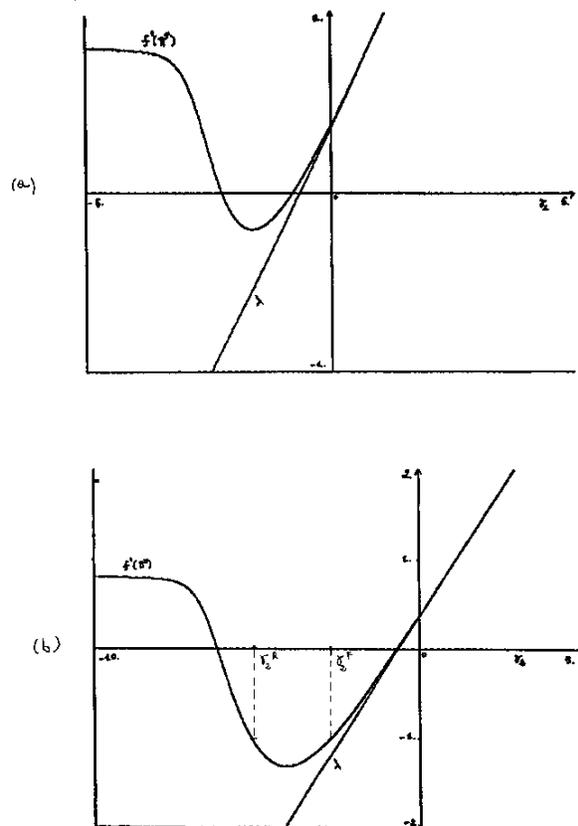


Fig. 7

Aumentando $(\gamma_0 - \phi_0)$ appare ed aumenta l'intervallo di instabilità di π^* con $f'(\pi^*) < -1$ (i.e. $\gamma_2 \in (\gamma_2^R, \gamma_2^F)$), in cui si hanno biforcazioni di tipo flip Forward e Reverse. Il "grado di complessità" raggiunto cresce con le dimensioni dell'intervallo, per esempio, la dinamica associata alla famiglia rappresentata in Fig. 7b per $\gamma_0 = 400$ (gli altri parametri sono dati in (47)) è il seguente:

$$\pi^*, C_2, C_4, C_2, \pi^*$$

cioè, diminuendo γ_2 il punto di equilibrio stabile diventa instabile a γ_2^F ed appare un'orbita di periodo due stabile, che biforca a sua volta, cioè diviene instabile ed appare un'orbita di periodo quattro stabile, seguita da una biforcazione flip Reverse a cui la C_4 diviene instabile ed appare una C_2 stabile e, dopo l'ultima biforcazione a γ_2^R , il punto di equilibrio π^* è di nuovo stabile, ed è stabile per ogni $\gamma_2 < \gamma_2^R$.

In Fig. 8 si riporta la funzione $f'(\pi^*(\gamma_2))$ della famiglia che è stata un esempio nelle precedenti sezioni, in cui è evidente un ampio intervallo (γ_2^R, γ_2^F) , con molte "finestre" di raddoppiamento di periodo e caos in esso.

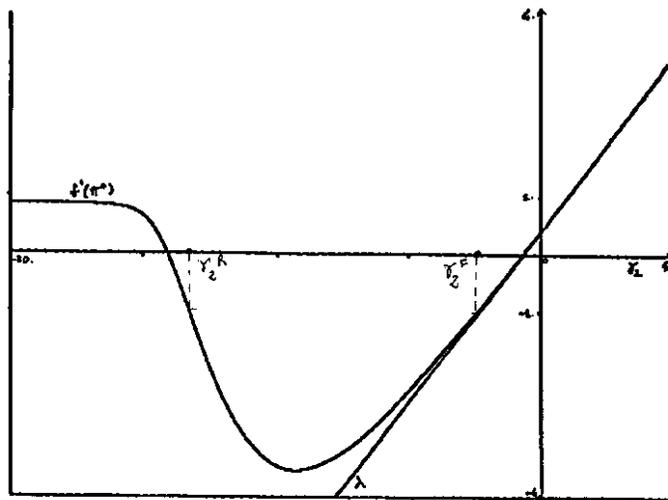


Fig. 8

CONCLUSIONI

Nella tradizione Marshall-Minsky-Kindleberger, l'economia reale è soggetta a vari tipi di shock che possono essere amplificati dal comportamento "non neutrale" del sistema creditizio. A differenza però dei contributi di Hayek e Friedman, il sistema individuato in questo lavoro non presenta quelle situazioni di ottimismo che derivano dalle premesse dei modelli neowalrasiani. Questo perché la moneta viene ad essere analizzata nella duplice veste di "intermediario degli scambi" e di "riserva di valore". Interrompendo la continuità logica e temporale caratteristica dei sistemi alla Arrow-Debreu, i modelli minkiani sono in grado di tener conto di fenomeni di ciclo e, possibilmente, di crisi.

La loro struttura resta, in ogni caso, reale. Shock monetari faranno passare il sistema da zone di stabilità ad altre di instabilità ma se, come sopra ipotizzato, il tasso di interesse viene endogenizzato, la soluzione finale di equilibrio sarà, se pur non ottimale, di tipo classico. Una volta che le autorità bancarie si preoccupino dell'inflazione e della solidità finanziaria del sistema, situazioni di tipo instabile possono emergere. Da questo non segue logicamente la validità dell'assunto di "neutralità delle politiche economiche" nella nuova macroeconomia classica, o la potenziale "dannosità" delle stesse, come sostenuto dalla scuola monetarista. In primo luogo, per entrambi i filoni teorici, essendo la quantità di moneta fissata esogenamente dalla Banca Centrale, aumenti della domanda si ripercuoteranno sul tasso di interesse, determinandone un rialzo: in termini del nostro modello, questo provocherà il passaggio a regioni instabili. In secondo luogo, la politica economica si rivela efficace nel ridurre il "vuoto occupazionale" che si determina in un'economia decentralizzata ogni volta che la domanda aggregata intersechi, come di solito avviene, la curva di offerta ad un livello inferiore a quello di pieno impiego.

In conclusione, pare legittimo ipotizzare una sostanziale stabilità della struttura "reale" dell'economia, se pur non di tipo "steady state". L'instabilità può sorgere una volta che influenze finanziarie, ad esempio relazioni tra cash-flow attesi che devono validare la struttura del debito accumulato, interagiscono con componenti reali. In tal senso non si può sostenere una presunta maggiore stabilità dell'economia reale su quella finanziaria, perché le moderne economie capitalistiche sono del tipo "monetario" dove una separazione tra le due componenti è logicamente scorretta, oltre che storicamente irrealistica.

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano il Prof. H.P. Minsky per gli utili commenti e suggerimenti ad una precedente versione del modello.

APPENDICE A

Una condizione necessaria affinché esista un'orbita di periodo due con valori $\pi^{(1)} = x$ e $\pi^{(2)} = y$, $x \neq y$, è che questi lavori soddisfino il seguente sistema:

$$(A. 1) \quad \begin{cases} y = \varphi_0 + \varphi_1 V_x + \varphi_2 x \\ x = \varphi_0 + \varphi_1 V_y + \varphi_2 y \\ (\varphi_1 - \gamma_1) V_x^2 - [(\gamma_0 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \gamma_2) x] V_x - \gamma_3((1 - \theta) x + \pi^e) = 0 \\ (\varphi_1 - \gamma_1) V_y^2 - [(\gamma_0 - \varphi_0) - (\varphi_2 - \gamma_2) y] V_y - \gamma_3((1 - \theta) x + \pi^e) = 0 \end{cases}$$

Eliminando V_x e V_y si ottiene

$$(A. 2) \quad \begin{cases} ay + bx + cxy + dy + cx + g = 0 \\ ax + by + cxy + dx + ey + g = 0 \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} a &= (\varphi_1 - \gamma_1) \\ b &= \varphi_2(\varphi_1\gamma_2 - \varphi_2\gamma_1) \\ c &= -\varphi_2(\varphi_1 - \gamma_1) - (\varphi_1\gamma_2 - \varphi_2\gamma_1) \\ d &= -\varphi_0(\varphi_1 - \gamma_1) - (\varphi_1\gamma_0 - \varphi_0\gamma_1) \\ e &= \varphi_0(\varphi_1\gamma_2 - \varphi_2\gamma_1) + \varphi_2(\varphi_1\gamma_0 - \varphi_0\gamma_1) - \gamma_3(1 - \theta)\varphi_1^2 \\ g &= \varphi_0(\varphi_1\gamma_0 - \varphi_0\gamma_1) - \gamma_3\pi^e\varphi_1^2 \end{aligned}$$

Geometricamente il sistema (A.2) rappresenta l'intersezione di due iperboli, essendo $(ab - c^2/4) = -\varphi_1^2(\varphi_2 - \gamma_2)^2/4 < 0$.

Sottraendo le due equazioni in (A.2) ed eliminando la soluzione ovvia $x=y$ si ha $(x+y) = (e-d)/(a-b)$. Esplicitando x oppure y e sostituendo in una delle (A.2) si ottiene la seguente equazione per $\pi=y$ e $\pi=x$

$$(A.3) \quad \pi^2 - S\pi + P = 0 \quad ; \quad S = \frac{e-d}{a-b}, \quad P = \frac{aS^2 + ds + g}{a + b - c}$$

BIBLIOGRAFIA

1. Arrow K. J. e F. H. Hahn, *General Competitive Analysis*, (Holden Day, San Francisco, 1971).
2. Asimakopoulos A., "*Finance, Saving and Investment in Keynes' Economics*", Cambridge Journal of Economics, (1985).
3. Chick V., *La Macroeconomia dopo Keynes*, (Il Mulino, Bologna, 1982).
4. Collet P. e J.P. Eckman, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical System*, (Birkhauser, Boston, 1980).
5. Debreu G., *Theory of Value*, (John Wiley, 1959)
6. Delli Gatti D., "*Il pensiero economico di Keynes (1923-1936) e l'interpretazione post-keynesiana soggettivista*", tesi di dottorato (non pubblicata), (1987).
7. Devaney R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, (Benjamin, Cummings Publishing, Menlo Park, CA, 1986).
8. Friedman M., "*The Role of Monetary Policy*", American Economic Review, Vol. LVIII, N. 1 (1968).
9. Frydman R. e E. Phelps, *Individual Forecasting and Aggregate Outcomes*, (Cup, Cambridge, 1983).
10. Guckenheimer J. e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations Dynamical System and Bifurcations of Vector Fields*, (Spriger-Verlag, N. Y., 1986).
11. Hayek F., *Prices and Production*, (Routledge, Londra, 1931).
12. Kaldor N., *Alternative Theories of Distribution (1955)*. Ristampato in *Essays on Value and Distribution* (Duckworth, Londra, 1960).
13. Kalecki M., *Theory of Economic Dynamics*, (Cup. Cambridge, 1971).
14. Kelsey D., "*The Economics of Chaos or the Chaos of Economics*", Oxford Economic Papers 40 (1988), 1-31.
15. Keynes J.M., *A Treatise on Money*, (Macmillian, Londra, 1930).
16. Keynes J.M., "*Alternative Theories of the Rate of Interest*", Economic Journal (1937 a).
17. Keynes J.M., "*The Ex-Ante Theory of the Rate of Interest*", Economic Journal (1937 b).
18. Keynes J.M., "*Mr. Keynes' Finance*", Economic Journal (1938).
19. Lucas R.E., *Studi sulla Teoria del Ciclo Economico*, (Giuffr , Milano, 1987).
20. Marshall A., *L'Economia della Produzione*, (1879, Tr. it. Isedi, Milano, 1975).
21. Minsky H.P., *John Maynard Keynes*, (Columbia Univ. Press N.Y., 1975).
22. Minsky H.P., *Can "It" Happen Again? Essays on Instability and Finance*, (M.E. Sharpe Armonk, N. Y., 1982).

23. Moore B., *Horizontalism vs Verticalism*, (in corso di stampa 1989).
24. Ohlin B., "Some Notes on the Stockholm Theory of Saving and Investment", *Economic Journal* (1937).
25. Roe F., "The Case for Flow of Funds and National Balance Sheet Accounts", *Economic Journal* (1973).
26. Sargent T., *Macroeconomic Theory* (Academic Press, 1979).
27. Symposium on the Marginal Productivity of Labor, *Journal of Post Keynesian Economics* (1987).
28. Tobin J. e W. Brainard, "Pitfalls in Financial Model Building", *American Economic Review, Papers and Proceedings* (1968).
29. Tobin J., "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory", *Journal of Money, Credit and Banking* (1969).