SULL'AUTOCORRELAZIONE SPAZIALE DI FENOMENI QUALITATIVI

Giuliano VISINI, Dip. di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro
Facoltà di Architettura - Università "G. D'Annunzio" di Chieti

ABSTRACT

It is well known that Moran (1948), Krishna Iyer (1949), Dacey (1965), Cliff (1969) and Cliff-Ord (1973, 1981) determined the first steps of the join count statistic.

Nevertheless these steps, on account of the parameters (A, D, etc.) by which they are characterized, can be referred to different contiguity hypothesis.

On the other end, the problem concerning the determination of the join count statistics still remains open for a finite subdivision of a region $\{a_i\}_{i \in N_n}$, which can be defined through small values of n and generally only through some hypothesis of contiguity.

In this note the casual variable $N_{BW}(V)$ of the contiguous diversities type BW will be determined, limitedly referred to the case of dicotomical observations (type {B, W}) and independent on n regional unity, in the particular case of the contiguity operator V defined for each r.u. a_i as $V(a_i)=\{a_j | j \in N_n-\{i\}\}$.

Thus, taken for equivalent the operators of simmetrical contiguities of the same A parameter (A stands for the bonds

number), $A = \sum_{i=1}^{n} L''_i = \sum_{i=1}^{n} L'_i$, it will be determined the c.v. $N_{BW}(2A)$ of the contiguous diversities type BW, these being pointed out for the equivalent class $[L]$ identifiable in the parameter 2A.

Eventuay, being observed that, on account of the symmetry bond of the operator, the c.v. $N_{BW}(2A)$ is similar to the c.v. $N_{BWvWB}(A)$ of the contiguous diversities type BW or WB, when associated to the class of non-symmetrical operators L'' (L') and L limitations, those symmetricall operators L with $\underline{L}''=(L''_i)_{i\in N_n}$ (or $\underline{L}'=((L'_i)_{i\in N_n}))$ are considered equivalent.

Limitedly referring to the previous hypothesis (dichotomy and independence) and to the V'' operator, limitation of V, c.v. is defined as $\underline{N}_{BWvWB}((V''_i)_{i\in N_n})$ which has, as determination of n successions, values whose i^{th} element stands for the amount of diversities exisiting between the r.u. a_i, and those to follow and from this the c.v. $N_{BWvWB}([(L''_i)_{i\in N_n}])$ through the use of a suitable algoritm.

Key-words: two colour maps; contiguity; finite populations; join-count; distributions.

SOMMARIO

E' noto come Moran (1948), Krishna Iyer (1949), Dacey (1965), Cliff (1969) e Cliff-Ord (1973, 1981) abbiano determinato i primi momenti della statistica join count.

Tuttavia questi momenti per i parametri (A, D, etc.) che li caratterizzano possono essere riferiti ad ipotesi diverse di contiguita'.

D'altra parte, la determinazione della distribuzione della statistica join count, per una suddivisione finita di un territorio $\{a_i\}_{i\in N_n}$, definibile per piccoli valori di n ed in generale solo per alcune ipotesi di contiguita', resta ancora un

problema aperto.

In questa nota, limitatamente al caso di osservazioni dicotomiche (di tipo {B, W}) ed indipendenti sulle n unita' territoriali, si determina, nel caso particolare dell'operatore di contiguita' V, definito per ogni u.t. a_i come $V(a_i)=\{a_j | j\in N_n-\{i\}\}$,la variabile casuale $N_{BW}(V)$ delle diversita' contigue di tipo BW.

Poi, considerati equivalenti gli operatori di contiguita' simmetrici L di medesimo parametro A (numero dei legami), $A = \sum_{i=1}^{n} L''_i = \sum_{i=1}^{n} L'_i$, si determina la v.c. $N_{BW}(2A)$ delle diversita' contigue di tipo BW rilevabili per la classe d'equivalenza $[L]$ identificabile nel parametro 2A.

Successivamente, osservato che per il vincolo di simmetria degli operatori L, la v.c. $N_{BW}(2A)$ e' uguale alla v.c. $N_{BWvWB}(A)$ delle diversita' contigue del tipo BW o WB, associata alla classe degli operatori non simmetrici L'' (L') limitazioni di L, si considerano equivalenti quegli operatori simmetrici L aventi medesima n-pla $\underline{L}'' = (L''_i)_{i\in N_n}$ (o $\underline{L}' = (L'_i)_{i\in N_n}$).

Limitatamente alle precedenti ipotesi (dicotomia ed indipendenza) e all'operatore V'', limitazione di V, si definisce la v.c. $\underline{N}_{BWvWB}((V''_i)_{i\in N_n})$, che ha come determinazioni delle successioni di n valori il cui elemento i-esimo rappresenta il numero delle diversita' esistenti tra l'u.t. a_i e le successive, e da questa la v.c. $N_{BWvWB}([(L''_i)_{i\in N_n}])$ attraverso l'introduzione di un opportuno algoritmo.

Parole chiavi: mappe a due colori; contiguita'; popolazioni finite; join-count; distribuzioni.

1. INTRODUZIONE

Sia $N_n = \{1,2,\ldots,n\}$ ed $n \geq 2$; se $\{a_i |\ i \in N_n\}$ indica una suddivisione territoriale finita di un territorio, un criterio di contiguita' spaziale tra le unita' territoriali e' definito da L,

$$L: \ \{a_i |\ i \in N_n\} \longrightarrow \{a_i |\ i \in N_n\},$$

che esprime una corrispondenza generalmente multivoca e non ovunque definita tale che $L(a_i) \subset \{a_j |\ j \in N_n,\ j \neq i\}$. Nel caso valga l'implicazione

$$a_j \in L(a_i) \Longrightarrow a_i \in L(a_j) \qquad (j \in N_n),$$

l'operatore di associazione L lo diremo simmetrico.

La funzione I, indicatrice delle unita' territoriali contigue,

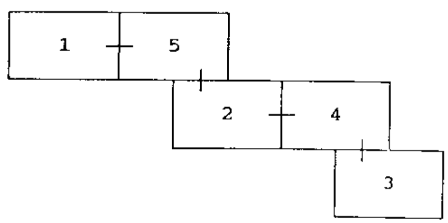
$$I: \ \{a_i |\ i \in N_n\} \times \{a_i |\ i \in N_n\} \longrightarrow \{0,1\}$$

tale che

$$I(a_p,a_q)=1 \Longleftrightarrow a_q \in L(a_p),$$

individua una matrice $\mathbb{L}$, detta matrice delle contiguita', che e' in corrispondenza biunivoca con l'operatore L.

Ad es., se si e' indicata con —— la contiguita' spaziale



all'operatore L resta associato la matrice $\mathbb{L}$:

$$\begin{vmatrix} 00001 \\ 00011 \\ 00010 \\ 01100 \\ 11000 \end{vmatrix}$$

Ad $\mathbb{L}$ sono legati dei parametri descrittivi, gia' noti in letteratura in quanto impiegati nella ricerca dei momenti degli indici di Moran, quali:

$$L_i=|L(a_i)|,\quad \sum_{i=1}^{n} L_i=2A,\quad \sum_{i=1}^{n} L_i(L_i-1)=2D, \text{etc..}$$

A questi aggiungiamo in particolare:

$$L'_i = L'(a_i) \quad \text{ed} \quad L''_i = L''(a_i) \qquad (i\in N_n)$$

per i quali rispettivamente L' indica la limitazione di L tale che

$$L'(a_i) = L(a_i) \cap \{a_j |\ j\in N_n,\ j<i\} \qquad (i\in N_n)$$

ed L'' la limitazione per cui

$$L''(a_i) = L(a_i) \cap \{a_j |\ j\in N_n,\ j>i\} \qquad (i\in N_n).$$

Tra tali parametri intercorrono le relazioni:

$$L_i = L'_i + L''_i \qquad (i\in N_n)$$

con $L'_1 = L''_n = 0$ e $0\le L'_i\le i-1$, $0\le L''_i\le n-i$.

$$\mathbb{L}'=\begin{vmatrix}00000\\00000\\00000\\01100\\11000\end{vmatrix}\quad \underline{L}'=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\2\end{pmatrix}\qquad\qquad \mathbb{L}''=\begin{vmatrix}00001\\00011\\00010\\00000\\00000\end{vmatrix}\quad \underline{L}''=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Sia $E=\{E_1,E_2,\ldots,E_m\}$ un sistema completo di m eventi con probabilita' $P(E_1)=p_1$, $P(E_2)=p_2$, ..., $P(E_m)=p_m$ e $\sum_{i=1}^{m} p_i=1$; se si assume che una successione di n eventi $\underline{X}=(X_i)_{i\in N_n}$ sia il risultato di n prove indipendenti per le quali si sia verificato k_1 volte l'evento E_1, k_2 volte l'evento E_2, ..., k_m volte l'evento E_m $(k_1+k_2+\ldots+k_m=n)$ allora all'espressione $\underline{X}^T\mathbb{L}\underline{X}$ compete la probabilita':

$$P(\underline{X})=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}.$$

Dall'uguaglianza

$$(1.1)\qquad \underline{X}^T\mathbb{L}\underline{X} = E^T\mathbb{F}_L(\underline{X})E,$$

ove $\mathbb{F}_L(\underline{X})$ e' la matrice quadrata di ordine m costituita dalle frequenze assolute degli eventi $\{E_1E_1,\ E_1E_2,\ldots,\ E_1E_m,\ E_2E_1,\ldots,\ E_mE_m\}$, si ha che le espressioni $\underline{X}^T\mathbb{L}\underline{X}$ e $E^T\mathbb{F}_L(\underline{X})E$ si realizzano con la medesima probabilita' $P(\underline{X})$, come anche ogni elemento dello sviluppo di $E^T\mathbb{F}_L(\underline{X})E$, ogni singolo elemento di $\mathbb{F}_L(\underline{X})$, etc..

La forma algebrica $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{F}_{L(a_i)}(\underline{X})$, equivalente della $E^T\mathbb{F}_L(\underline{X})E$, in cui $\mathbb{F}_{L(a_i)}(\underline{X})$ indica la matrice di ordine m i cui elementi $f_{rsL(a_i)}(\underline{X})$ sono le frequenze della modalita' E_rE_s di cui la prima E_r rilevabile sull'unita' territoriale a_i e la seconda E_s sull'unita' $a_j \in L(a_i)$, porta a riconsiderare l'espressione $\underline{X}^T\mathbb{L}\underline{X}$ riproponendola in notazione vettoriale-matriciale $\left(\mathbb{F}_{L(a_i)}(\underline{X})\right)_{i\in N_n}$ piu' efficace per le considerazioni che seguono. In particolare, riferendosi alla modalita' E_rE_s si hanno le n-ple di frequenze $\underline{f}_{rsL}(\underline{X})=(f_{rsL(a_i)}(\underline{X}))_{i\in N_n}$.

Nel precedente es. se $E=\{E_1, E_2, E_3\}$ ed $\underline{X}^T=(E_1, E_2, E_1, E_3, E_2)$ si ha

		a_1			a_2			a_3			a_4			a_5		
		E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3
a_1	E_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	E_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_2	E_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
	E_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_3	E_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	E_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_4	E_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E_3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	E_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E_2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Le componenti di $\left(\mathbb{F}_{L(a_i)}(\underline{X})\right)_{i\in N_n}$ sono:

$$\mathbb{F}_{L(a_1)}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} 010 \\ 000 \\ 000 \end{vmatrix} \qquad \mathbb{F}_{L(a_2)}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} 000 \\ 011 \\ 000 \end{vmatrix} \qquad \mathbb{F}_{L(a_3)}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} 001 \\ 000 \\ 000 \end{vmatrix}$$

$$\mathbb{F}_{L(a_4)}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} 000 \\ 000 \\ 110 \end{vmatrix} \qquad \mathbb{F}_{L(a_5)}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} 000 \\ 110 \\ 000 \end{vmatrix}$$

ed $\mathbb{F}_L(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{F}_{L(a_i)}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} 011 \\ 121 \\ 110 \end{vmatrix}$.

Le n-ple delle frequenze delle modalita' E_rE_s con riferimento all'es. sono:

$$\underline{f}^T_{11L}(\underline{X}) = (00000) \qquad \underline{f}^T_{12L}(\underline{X}) = (10000) \qquad \underline{f}^T_{13L}(\underline{X}) = (00100)$$
$$\underline{f}^T_{21L}(\underline{X}) = (00001) \qquad \underline{f}^T_{22L}(\underline{X}) = (01001) \qquad \underline{f}^T_{23L}(\underline{X}) = (01000)$$
$$\underline{f}^T_{31L}(\underline{X}) = (00010) \qquad \underline{f}^T_{32L}(\underline{X}) = (00010) \qquad \underline{f}^T_{33L}(\underline{X}) = (00000).$$

2. LA VARIABILE CASUALE $N_{BW}(2A)$.

Sia E la variabile casuale $\begin{pmatrix} B & W \\ p & q \end{pmatrix}$ osservabile su ogni unita' territoriale a_i e sia $\underline{X}=(X_i)_{i\in N_n}$ una successione di n eventi indipendenti osservabile sulla suddivisione territoriale finita.

Al variare di $\underline{X}$ resta definita la v.c. $N_{BW}(L)$ delle diversita' contigue BW, dipendente dal particolare operatore di associazione L, le cui determinazioni η altro non sono che frequenze $f_{BWL}(\underline{X})$.

In particolare, per l'operatore V, la cui matrice delle contiguita' $\mathbb{V}$ ha generico elemento $v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i\neq j \\ 0 & \text{per } i=j \end{cases}$, la v.c. $N_{BW}(V)$ ha la seguente distribuzione (2.1):

ν	0	n-1	...	$k_1 k_2$	...	$[n/2][(n+1)/2]$
$P(\nu)$	p^n+q^n	$n(pq^{n-1}+p^{n-1}q)$	...	$\frac{n!}{k_1!k_2!}\left(p^{k_1}q^{k_2}+p^{k_2}q^{k_1}\right)$	...	....

$$\begin{cases} k_i \geq 0 \ (i \in N_2) \\ k_1+k_2=n \end{cases} .$$

Per attribuire all'evento $[n/2][(n+1)/2]$ la sua **probabilita'**, si **distinguono** due casi a_0) e a_1) rispettivamente **riferiti ad n pari e n dispari:**

a_0) $$P(n^2/4) = \binom{n}{n/2}(pq)^{n/2} ,$$

a_1) $$P([n/2][(n+1)/2]) =$$

$$= \binom{n}{[n/2]}\left(p^{[n/2]}\ q^{[(n+1)/2]} + p^{[(n+1)/2]}\ q^{[n/2]}\right).$$

Ove si consideri un generico operatore simmetrico L, la corrispondente variabile casuale $N_{BW}(L)$, le cui determinazioni $\nu(L)$ sono le $f_{BWL}(\underline{X})$, resta definita attraverso la commutativita' dei diagrammi ottenuti al variare delle n-ple osservabili $\underline{X}$:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X}^T \mathbb{V} \underline{X} \arrow[rr] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & E^T \mathbb{F}_V(\underline{X}) E \arrow[rr] \arrow[dd, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & f_{BWV}(\underline{X}) \arrow[dd, dash] \arrow[dl, dash] \\
& P(\underline{X}) & & P(\underline{X}) & \\
\underline{X}^T \mathbb{L} \underline{X} \arrow[rr] \arrow[ur, dash] & & E^T \mathbb{F}_L(\underline{X}) E \arrow[rr] \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & f_{BWL}(\underline{X}) \arrow[ul, dash]
\end{tikzcd}$$

Si noti tuttavia che la cardinalita' 2^n dell'insieme delle n-ple $\underline{X}$ rende eccessivamente oneroso il calcolo per i valori di n riscontrabili nei casi concreti.

Se introduciamo nell'insieme degli operatori di associazione $\{L\}$ la relazione di equivalenza ~ cosi' definita:

$$L_1 \sim L_2 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} L_{1i} = \sum_{i=1}^{n} L_{2i} = 2A,$$

ed indichiamo con 2A la classe degli operatori equivalenti $[L]$ allora ad ogni n-pla ordinata $\underline{X}$ corrisponde una $\binom{\binom{n}{2}}{A}$-pla non ordinata $\left(f_{BWL}(\underline{X})\right)_{L\in 2A}$.

Quindi, indicata con $N_{BW}(2A)$ la variabile casuale le cui determinazioni $\eta(2A)$ sono le $f_{BW}(L,\underline{X})$ al variare di L nella classe 2A e di $\underline{X}$, la probabilita' di $\eta(2A)$ e' somma di probabilita' composte di eventi indipendenti di cui l'uno fa riferimento ad una distribuzione ipergeometrica e l'altro alla distribuzione binomiale (2.1):

$$P(\eta(2A)) = \sum_{\nu\in N_{BW}(V)} \frac{\binom{\nu}{\eta(2A)}\binom{\binom{n}{2}-\nu}{A-\eta(2A)}}{\binom{\binom{n}{2}}{A}} P(\nu) \tag{2.2}$$

con le condizioni $\begin{cases} 1\le A\le \binom{n}{2} \\ \nu-\eta(2A)\ge 0 \\ \binom{n}{2}-A-(\nu-\eta(2A))\ge 0 \end{cases}$

In particolare per $A=\binom{n}{2}$ si ha $N_{BW}\left(2\binom{n}{2}\right) = N_{BW}(V)$ mentre per A=1 la v.c. $N_{BW}(2)$ ha distribuzione:

η	0	1
$P(\eta)$	p^2+q^2	$2pq$

.

Facendo riferimento all'es. per p =.5 la v.c. $N_{BW}(8)$ ha la seguente distribuzione:

η	0	1	2	3	4
$P(\eta)$	.0878	.1905	.4018	.2738	.0461

.

3. LA VARIABILE CASUALE $N_{BW\vee WB}(\underline{L}'')$.

Se V'' e' l'operatore limitazione di V, la cui matrice $\mathbf{V}''$ ha elementi $v''_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{per } i<j \\ 0 & \text{per } i\geq j \end{cases}$, allora la v.c. $N_{BW\vee WB}(V'')$, che ha per determinazioni il numero complessivo delle diversita' tipo BW o WB, e' esattamente la v.c. $N_{BW}(V)$ (2.1) e, piu' in generale, per la simmetria e' anche $N_{BW\vee WB}(L'') = N_{BW}(L)$ come anche $N_{BW}(2A) = N_{BW\vee WB}(A)$, essendo A la classe degli operatori L'' tali che $\sum_{i=1}^{n} L''_i = A$.

Ora gli $\binom{\binom{n}{2}}{A}$ operatori equivalenti di classe $A = [L'']$ possono essere ripartiti in sottoclassi $[\underline{L}''] = [(L''_i)_{i\in N_n}]$ attraverso la nuova relazione d'equivalenza:

$$L''_1 \approx L''_2 \Longleftrightarrow (L''_{1i})_{i\in N_n}=(L''_{2i})_{i\in N_n}.$$

In particolare gli insieme quozienti $\{L''\}/\sim$ e $\{L''\}/\approx$ hanno rispettivamente la classe $A=\binom{n}{2}$ e la classe $[\underline{L}'']=[(n-i)_{i\in N_n}]$ costituita dal solo operatore V''.

Al fine di definire la v.c $N_{BW\vee WB}([\underline{L}''])$, che ha per determinazioni il numero complessivo delle diversita' di tipo BW o

WB al variare dell'operatore nella classe [$\underline{L}$"], introduciamo la v.c. $\underline{N}_{BWvWB}(\underline{V}")$, che ha come determinazioni delle successioni di n valori il cui elemento i-esimo e' il numero delle diversita'(o BW o WB) esistenti tra la u.t. a_i e le successive u.t. a_j con $j\in(N_n-N_1)$.

E' possibile rappresentare il processo di generazione delle diverse determinazioni di $\underline{N}_{BWvWB}(\underline{V}")$ con il seguente schema (3.1), in cui distinguiamo:

a) due tipi di frecce ——> e - - ->, le quali esprimono rispettivamente il realizzarsi dell'evento B e dell'evento W;

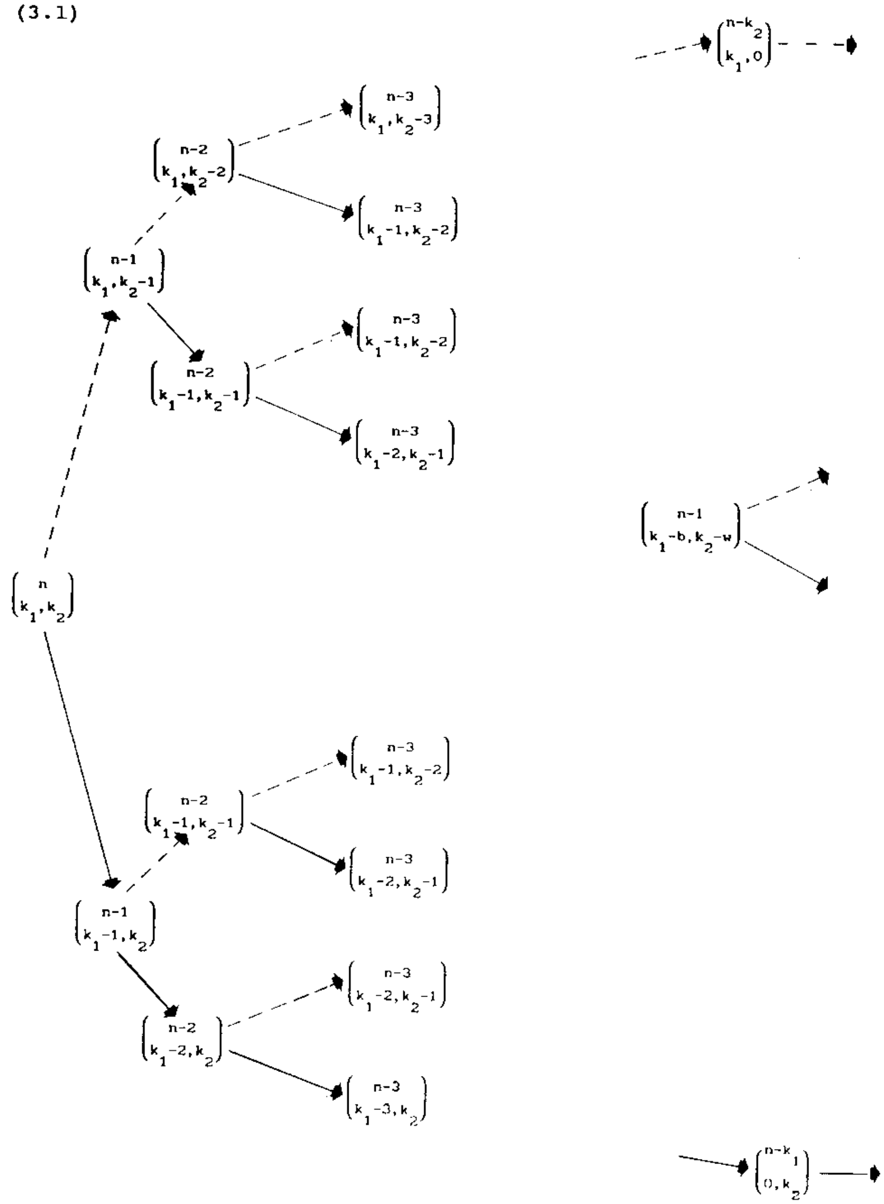
b) un vertice iniziale $\binom{n}{k_1,k_2}$ al variare di k_1 e k_2 con $k_1+k_2=n$;

c) vertici individuati dalle terne (i,b,w) con $1\le i\le n$ in cui i e' l'ordine dell'unita' territoriale di riferimento mentre b e w sono rispettivamente il numero degli eventi B e W che si sono realizzati dalla prima u.t. alla i-esima u.t. per cui b+w=i con le limitazioni $0\le b\le k_1$ e $0\le w\le k_2$;

e dove la biforcazione dall'elemento generico $\binom{n-1}{k_1-b,k_2-w}$ e' eseguibile se il suo valore e' maggiore di 1.

Infatti, $\binom{n}{k_1,k_2}$ per ogni k_1, k_2 rappresenta il numero delle osservazioni $\underline{X}$ per le quali si e' realizzato k_1 volte l'evento B e k_2 volte l'evento W e se questo valore e' maggiore di 1, significa che per la prima u.t. puo' realizzarsi sia l'evento B che l'evento W e si analizzano i due casi si vede che $\binom{n}{k_1,k_2}$ si scinde in $\binom{n-1}{k_1,k_2-1}$ e $\binom{n-1}{k_1-1,k_2}$ la cui somma e' $\binom{n}{k_1,k_2}$ e, se uno dei due valori trovati e' maggiore di 1, significa che nella seconda u.t. e' di nuovo possibile la realizzazione sia dell'evento B che dell'evento W, cosi' proseguendo.

(3.1)



n-k_2 / k_1, 0
n-3 / k_1, k_2-3
n-2 / k_1, k_2-2
n-3 / k_1-1, k_2-2
n-1 / k_1, k_2-1
n-3 / k_1-1, k_2-2
n-2 / k_1-1, k_2-1
n-3 / k_1-2, k_2-1
n-1 / k_1-b, k_2-w
n / k_1, k_2
n-3 / k_1-1, k_2-2
n-2 / k_1-1, k_2-1
n-3 / k_1-2, k_2-1
n-1 / k_1-1, k_2
n-3 / k_1-2, k_2-1
n-2 / k_1-2, k_2
n-3 / k_1-3, k_2
n-k_1 / 0, k_2

Inoltre l'elemento $\binom{n-1}{k_1-b,k_2-w}$, con $1\le i\le n$, esprime in sintesi e le componenti i-esime delle frequenze $\underline{\nu} = \underline{f}_{BWvWB}V''(\underline{X})$ attraverso i valori (k_1-b) o (k_2-w), secondo che si realizzi il w-esimo evento W o il b-esimo evento B sulla i-esima u.t., ed i modi di osservare tali valori nella quantita' data dallo stesso binomiale e le probabilita' $p^{k_1}q^{k_2}$ per ciascuna delle $\binom{n}{k_1,k_2}$ successioni differenti $\underline{X}$ di k_1 eventi B e k_2 eventi W.

Facendo riferimento allo schema (3.1) ed all'esempio, in cui e' n=5, la v.c. $\underline{N}_{BWvWB}(V'')$ e':

$\underline{\nu}$	0 0 0 0 0	41111 03111 00211 00011 00000	3333222222 3111222222 0211211112 0011011110 0000000000	2222223333 2222221113 2111121120 0111101100 0000000000	11114 11130 11200 11000 00000	0 0 0 0 0
$P(\underline{\nu})$	p^5	pq^4	p^2q^3	p^3q^2	p^4q	q^5

che ridotta a forma normale diventa:

ν	0	4			
$\underline{\nu}$	0 0 0 0 0	4 0 0 0 0	1 3 0 0 0	1 1 2 0 0	1 1 1 1 0
$P(\underline{\nu})$	p^5+q^5	p^4q+pq^4	p^4q+pq^4	p^4q+pq^4	$2p^4q+2pq^4$

6				
3 3 0 0 0	3 1 2 0 0	3 1 1 1 0	2 2 2 0 0	2 2 1 1 0
$p^3q^2+p^2q^3$	$p^3q^2+p^2q^3$	$2p^3q^2+2p^2q^3$	$2p^3q^2+2p^2q^3$	$4p^3q^2+4p^2q^3$

Se ora facciamo riferimento ad una specifica u.t., ad es. la i-esima, attraverso lo schema (3.1) possiamo determinare la v.c. $N_{BWvWB}(V''_i)$ (3.2), numero delle diversita' BW o WB riferite alla stessa u.t., le cui determinazioni $\nu_i \in [0,n-i]$ e le probabilita' $P(\nu_i)$ si ottengono per riduzione, secondo il principio delle probabilita' totali, dalle $P(\underline{\nu})$.

(3.2)

$i \backslash \nu_i$	0	1	2	3	4
1	p^5+q^5	$4(p^4q+pq^4)$	$6p^2q^2$	$4p^2q^2$	p^4q+pq^4
2	p^4+q^4	$3(p^3q+pq^3)$	$6p^2q^2$	p^3q+pq^3	
3	p^3+q^3	$2pq$	pq		
4	p^2+q^2	$2pq$			
5	1				

Pertanto la v.c. $N_{BWvWB}([L''_i])$ ha come determinazioni i valori $\eta([L''_i]) \in [0,L''_i]$ con probabilita' (3.3)

$$P(\eta([L''_i])) = \sum_{\nu_i=\eta([L''_i])}^{n-i} \frac{\binom{\nu_i}{\eta([L''_i])}\binom{n-i-\nu_i}{L''_i-\eta([L''_i])}}{\binom{n-i}{L''_i}} P(\nu_i)$$

sotto le condizioni $\begin{cases} 0 \le L''_i \le n-i \\ (n-i)-L''_i-(\nu_i-\eta([L''_i])) \ge 0 \end{cases}$.

Piu' in generale, per la v.c. $\underline{N}_{BWvWB}([\underline{L}''])$ le determinazioni $\underline{\eta}([\underline{L}''])$ sono costituite dalle successioni di n elementi, con n-esimo elemento 0, tali che queste abbiano almeno una successione $\underline{\nu}$ tra le determinazioni della v.c. $\underline{N}_{BWvWB}(\underline{V}'')$ per cui $\eta_i([\underline{L}'']) \le \nu_i$ $(i \in N_n)$; allora per le $\underline{\eta}([\underline{L}''])$, sotto l'ipotesi di indipendenza, le probabilita' sono espresse da (3.4):

$$P(\underline{\eta}([\underline{L}"])) = \sum_{\underline{\nu}\in \underline{N}_{BWvWB}(\underline{V}")} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\binom{\nu_i}{\eta_i([\underline{L}"])}\binom{n-i-\nu_i}{L_i"-\eta_i([\underline{L}"])}}{\binom{n-i}{L_i"}} \right) P(\underline{\nu})$$

con le condizioni $\begin{cases} \nu_i-\eta_i([\underline{L}"])\geq 0 \\ 0\leq L_i"\leq n-i \\ (n-i)-L_i"-(\nu_i-\eta_i([\underline{L}"]))\geq 0 \end{cases}$

Infine, si determina la v.c. $N_{BWvWB}([\underline{L}"])$ per mezzo della v.c. $\underline{N}_{BWvWB}([\underline{L}"])$ ponendo $\eta([\underline{L}"])=\sum_{i=1}^{n}\eta_i([\underline{L}"])$ con $\eta_i([\underline{L}])$ componente i-esima di $\underline{\eta}([\underline{L}])$.

Per l'es. avendosi $(\underline{L}")^T=(1,2,1,0,0)$ per p=.5 si hanno:

a) Le v.c. $N_{BWvWB}([L_i"])$

$\eta([L_i"])$ / i	0	1	2
1	.5	.5	
2	.25	.5	.25
3	.5	.5	
4	1		
5	1		

Si osservi, attraverso l'esempio, che $N_{BWvWB}([L_i"])=N_{BWvWB}(V_j")$ per $j=n-L_i"$.

$$\underline{L}''=\begin{vmatrix}00001\\00011\\00010\\00000\\00000\end{vmatrix},\quad (\underline{L}'')^T=(1,2,1,0,0)\ \text{ ed } A=4,\ \text{ per } p=.5 \text{ si hanno le}$$

distribuzioni:

η / P	0	1	2	3	4
$P(\eta(A))$	.0878	.1905	.4018	.2738	.0461
$P(\eta([\underline{L}'']))$	.0833	.2083	.3750	.2917	.0417

rispettivamente con media e varianza:

$$E[N_{BWvWB}(A)]=2 \qquad E[N_{BWvWB}([\underline{L}''])]=2$$
$$Var[N_{BWvWB}(A)]=1 \qquad Var[N_{BWvWB}([\underline{L}''])]=1$$

valori coincidenti con quelli ricavabili utilizzando le formule proposte da P.A.P. Moran (1948) per il calcolo dei momenti della statistica N_{BW}.

Ringrazio il Sig. F. Critani per la collaborazione prestata nella stesura dei programmi mirati alla realizzazione di questa nota e per i suggerimenti propositivi ai fini di una generalizzazione dei risultati sin qui ottenuti.

BIBLIOGRAFIA

Badaloni M.-Vinci E.,1988-"Contributi all'analisi dell'autocorrelazione spaziale", Metron vol.XLVI, n.1-4, pp.119-140.

Cliff A.D.-Hagget P.-Ord J.K.-Basset K.A.-Davies R.B.-"Elements of spatial structure"- Cambridge University Press, London, 1975.

Cliff A.D.-Ord J.K.- "Spatial autocorrelation" - Pion Limited, London, 1973.

Cliff A.D.-Ord J.K.- "Spatial process" - Pion Limited, London, 1981.

Coli M., 1982- "Sulla previsione dei dati territoriali: la

b) La v.c. $\underline{N}_{BWvWB}([\underline{L}''])$

η	0	1			2				3			4
$\underline{\eta}$	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 1 0 0	1 1 0 0 0	1 0 1 0 0	0 1 1 0 0	0 2 0 0 0	1 1 1 0 0	1 2 0 0 0	0 2 1 0 0	1 2 1 0 0
$P(\underline{\eta})$	.0833	.0833	.0833	.0417	.0833	.0417	.1667	.0833	.1667	.0833	.0417	.0417

c) La v.c. $N_{BWvWB}([\underline{L}''])$

η	0	1	2	3	4
$P(\eta)$	.0833	.2083	.3750	.2917	.0417

4. CONCLUSIONI

La ricerca presentata in questa nota evidenzia come attraverso l'acquisizione di informazioni quali la simmetria, la numerosita' dei legami e la distribuzione degli stessi per unita' territoriale, si possano considerare distribuzioni di probabilita' che "tendono" alla distribuzione $N_{BW}(L)$ del numero delle diversita' BW per lo specifico operatore di contiguita' L.

Infatti riferendosi all'esempio proposto per il quale:

funzione di autocorrelazione spazio-temporale per l'identificazione e la stima di modelli della classe STARMA" - Atti della XXXI Riunione Scientifica S.I.S., Torino.

Dacey, M.F., 1965- "A review on measures of contiguity for two and k-color maps", Technical Report N.2, Spatial Diffusion Study, Department of Geography Northwestern University, Evanston, Illinois.

Krishna Iyer, P.V.A., 1949- "The first and second moments of some probability distributions arising from points on a lattice, and their applications", Biometrika 36,135-141.

Moran P.A.P., 1948- "The interpretation of statistical maps" - J.R.S.S., Series B,10,243-251.

Rényi A.- "Calcul des probabilités" - Dunod, Paris, 1966.

Visini G.-Sclocco T.,1981-"Sull'indice di autocorrelazione spaziale C di Geary",Atti del V Convegno A.M.A.S.E.S., pp.277-298, Perugia 22-24 ottobre 1981.

Visini G.-Sclocco T.,1982-"Sui primi due momenti della statistica "join count" di Moran",Atti del VI Convegno A.M.A.S.E.S., pp.621-642, Marina di Campo (Isola d'Elba) 1-3 ottobre 1982.

Visini G.,1985-"Sull'analisi di carte tematiche bicromatiche attraverso l'autocorrelazione spazio-temporale",Atti Giornate di Lavoro A.I.R.O. 1985,pp.211-229, Venezia 30 settembre-2 ottobre 1985, Ed. Tecnoprint Bologna.

Visini G.,1989-"Considerazioni sul test z per gli indici di Moran",Pescara, accettata per la pubblicazione sugli Atti del I Convegno di Matematica Applicata all'Economia e alla Ingegneria,26-28 gennaio 1989,Pescara.

Visini G.,1990-"Considerazioni sulla statistica join count e l'informazione di Shannon",Convegno Giornate di Lavoro A.I.R.O. 1990, Sorrento 3-5 ottobre 1990, pp.853-865, Ed.Fast Print, Napoli.

Visini G.,1990-"Considerazioni sull'indice di correlazione spaziale",Giornate di Studio "Analisi dei dati spaziali e classificazione dei dati", Pescara 11-12 ottobre 1990, pp.477-488, Ed. Solfanelli M., Chieti.