I NUMERI DI FIBONACCI E LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Bruno BARIGELLI, Luca OLIVIERI e Clara VIOLA
Ist. Mat. Stat. - Università di Ancona

Consideriamo i numeri individuati dalla relazione di ricorrenza

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \qquad (n \varepsilon N,\ n \geq 1)$$

con le condizioni iniziali $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=1$, che possiamo chiamare <u>numeri di Fibonacci generalizzati o del terzo ordine</u>, introduciamo i numeri di Fibonacci del terzo ordine di <u>indice negativo</u> e diamo una espressione che permette di calcolare a_n in funzione dell'indice n. Di seguito, otteniamo l'equazione differenziale lineare del primo ordine che ha per soluzione una funzione sviluppabile in serie di potenze con coefficienti proprio i numeri di Fibonacci del terzo ordine.

1- INTRODUZIONE

L'uso della matematica è ormai sempre più diffuso nei campi più diversi: dalla Biologia alla Statistica alla Ricerca Operativa, all'Economia.

In generale però molti problemi applicativi conducono a situazioni di tipo discreto, in particolare a relazioni di ricorrenza e quindi ad equazioni alle differenze finite.

E' noto che, per diversi motivi, in matematica sono più agevoli da trattare problemi di tipo continuo e quindi è opportuno riuscire a trovare collegamenti stretti tra i due campi. Questo lavoro tratta appunto uno di questi temi.

Gli elementi della successione

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n\geq 3) \qquad (1)$$

con le condizioni iniziali $a_1=1$, $a_2=1$, sono i numeri di Fibonacci individuati da una relazione di ricorrenza del secondo ordine ed è noto (vedi [1]) che la serie di potenze $\sum_0^\infty{}_n\, a_n x^n$ converge, per $|x|<(\sqrt{5}-1)/2$ alla funzione $x/(1-x-x^2)$.

In [4] viene illustrato un procedimento che permette di ottenere, a partire dalla relazione (1), l'equazione differenziale lineare del 1° ordine

$$-\frac{dy}{dx} + y\,\frac{1-x^2}{x(1-x-x^2)} = 0$$

che ha per soluzione una funzione che, se si impone la condizione $y(0)= 0$, è sviluppabile in serie di potenze in un opportuno intorno dell'origine con coefficienti proprio i numeri di Fibonacci (1).

In questo lavoro vengono presi in considerazione i numeri individuati dalla relazione

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \qquad (n\geq 1) \qquad (2)$$

con le condizioni iniziali

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=1 \qquad (3)$$

che, per analogia con i precedenti, verranno chiamati numeri di Fibonacci del terzo ordine. Dopo aver dimostrato alcune proprietà aritmetiche dei numeri (2) vengono introdotti i numeri di Fibonacci del terzo ordine con indice negativo dimostrando, anche per questi numeri, alcune proprietà aritmetiche; viene ripresa per a_n l'espressione in funzione di n: $a_n= c_1 t_1{}^n + \varepsilon_n$ ottenuta in [2] e viene fornito un programma per il calcolo di un valore approssimato di t_1 sia per eccesso che per difetto. Inoltre si dimostra che la serie di potenze

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\ a_n x^n$$

i cui coefficienti a_n sono i numeri (2) converge in un intervallo con centro l'origine degli assi, alla funzione

$$S(x) = \frac{x^2}{1-x-x^2-x^3} \qquad (4)$$

Di seguito, utilizzando un procedimento indicato in [4], si ottiene l'equazione differenziale lineare del

1° ordine

$$-\frac{dy}{dx} + y\,\frac{2-x-x^3}{x-x^2-x^3-x^4} = 0$$

che ha per soluzione una funzione, che, se si impone la condizione $y(0) = 0$, è sviluppabile in serie di potenze in un opportuno intorno dell'origine con coefficienti proprio i numeri che verificano la (2).

2- NUMERI DI FIBONACCI DEL TERZO ORDINE.

2.1- PROPRIETA' ARITMETICHE.

2.1.1 <u>Somma dei primi n numeri</u>: Se S_n indica la somma dei primi n numeri allora

$$S_n = \tfrac{1}{2}(a_{n+3} - a_{n+1} - 1). \tag{5}$$

<u>Dim</u>: Infatti, scritta la (2) con i valori dell'indice 1, 2,...,n, e sommando membro a membro, si ottiene

$$2S_n = a_{n+3} - a_{n+1} - a_3 + a_1$$

da cui, tenendo presenti le condizioni iniziali (3), si ottiene la (5).

NOTA BENE: è possibile esprimere S_n in funzione di a_n e precedenti, anzichè dei numeri seguenti a_n, e si ottiene $S_n = \tfrac{1}{2}(3a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} - 1)$.

2.1.2 <u>Somma dei primi n numeri di indice dispari</u>: Se S_d^n indica la somma dei primi n numeri di indice dispari, allora

$$S_d^n = \tfrac{1}{2}(a_{2n+2} - a_{2n+1} - 1). \qquad (6)$$

<u>Dim:</u> Infatti, scritta la (2) nella forma

$$a_{n+2} + a_n = a_{n+3} - a_{n+1},$$

ponendo successivamente l'indice uguale ad 1,3,...,2n-1 e sommamdo membro a membro, si ha $2S_d^n = a_{2n+2} - a_{2n+1} - 1$ da cui, ricordando le (3), segue la (6).

Corollario 1: due elementi consecutivi della (2), il primo dei quali di indice dispari, hanno parità diversa.

Corollario 2: due elementi consecutivi della (2), il primo dei quali di indice pari, hanno la stessa parità.

Corollario 3: la successione dei numeri di Fibonacci (2) alterna, a coppie, numeri pari e dispari e quindi numeri che si trovano a distanza di due posizioni sono di parità diversa.

NOTA BENE: è possibile esprimere S_d^n in funzione di a_{2n-1} e precedenti, invece dei termini seguenti a_{2n-1} e si ottiene $S_d^n = a_{2n-1} + \tfrac{1}{2}(a_{2n-2} + a_{2n-3} - 1)$.

2.1.3 <u>Somma dei primi n numeri di indice pari</u>: Se S_p^n indica la somma dei primi n numeri di indice pari, allora

$$S_p^n = \tfrac{1}{2}(a_{2n+3} - a_{2n+2}) \qquad (7)$$

<u>Dim</u>: Infatti, sottraendo dalla (5) scritta per i primi 2n numeri la (6), si ottiene la (7).

NOTA BENE: è possibile esprimere S_p^n in funzione di a_{2n} e precedenti anzichè dei termini seguenti a_{2n} e si ottiene $S_p^n = a_{2n} + \frac{1}{2}(a_{2n-1} + a_{2n-2})$.

2.2- NUMERI DI FIBONACCI CON INDICE NEGATIVO

Ponendo nella (2) -n al posto di n, si ottiene

$$a_{-n} = a_{-n+3} - a_{-n+2} - a_{-n+1} \tag{8}$$

che è la relazione che caratterizza i numeri di Fibonacci del terzo ordine di indice negativo.

Ponendo nella (8) successivamente n = 0,1,2,..., si ha

$$a_0 = a_3 - a_2 - a_1 = 0$$

$$a_{-1} = a_2 - a_1 - a_0 = 1$$

$$a_{-2} = a_1 - a_0 - a_{-1} = -1$$

....

Considerando come primo elemento della successione a_{-1}, i primi venti numeri sono

1, -1, 0, 2, -3, 1, 4, -8, 5, 7, -20, 18, 9, -47, 56, 0, -103, 159, -56, -206.

Anche per i numeri di questa successione si possono stabilire alcune proprietà aritmetiche.

2.2.1 <u>Somma dei primi n numeri</u>: Se S_{-n} indica la somma dei primi n numeri, allora

$$S_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} - a_{-n+2} + 1). \tag{9}$$

Dim:Infatti, sostituendo successivamente ad n nella (8) i numeri 1,2,...n, e sommando membro a membro, si ottiene

$$2S_{-n} = a_2 - a_0 - a_{-n+2} + a_{-n}$$

da cui, tenendo presenti le condizioni iniziali (3), la (9).

2.2.2 Somma dei primi n numeri di indice dispari: Se $S'_d{}^n$ indica la somma dei primi n numeri di indice dispari, allora

$$S'_d{}^n = \tfrac{1}{2}(1 - a_{-2n} - a_{-2n-1}) \tag{10}$$

Dim: Infatti, scritta la (8) nella forma

$$a_{-n} + a_{-n+2} = a_{-n+3} - a_{-n+1}$$

sostituendo successivamente ad n i numeri 1, 3,...,2n+ +1, sommando membro a membro, si ha

$$2S'_d{}^n = a_2 - a_{-2n} - a_1 - a_{-2n-1}$$

e tenendo presenti le condizioni iniziali (3) si ottiene la (10).

Corollario: due numeri consecutivi, di cui quello con indice maggiore pari, sono di diversa parità.

Corollario: due numeri consecutivi, di cui quello con indice maggiore dispari, hanno la stessa parità.

Corollario: la successione (8) alterna, a coppie, numeri pari e numeri dispari e quindi numeri che si trovano a distanza di due posizioni sono di diversa parità.

NOTA BENE: è possibile esprimere S'^n_d in funzione di a_{-2n+1} e precedenti anzichè dei numeri seguenti a_{-2n+1} e si ottiene

$$S'^n_d = \tfrac{1}{2}(1 + a_{-2n+1} - a_{-2n+2}). \qquad (10')$$

2.2.3 <u>Somma dei primi n numeri di indice pari</u>: Se S'^n_p indica la somma dei primi n numeri di indice pari, allora

$$S'^n_p = \tfrac{1}{2}(a_{-2n} - a_{-2n+1}) \qquad (11)$$

<u>Dim</u>: Infatti, sottraendo dalla (9) scritta per i primi 2n+1 numeri la (10'), si ottiene la (11).

3- CALCOLO DI a_n IN FUNZIONE DELL'INDICE

Per ottenere a_n in funzione di n dalla (2), (vedi [2]), come è noto dalla teoria delle equazioni alle differenze finite (vedi ad esempio [5]) occorre risolvere l'equazione caratteristica ad essa associata

$$t^3 - t^2 - t - 1 = 0$$

Dette t_1, t_2, t_3 le sue soluzioni, si avrà

$$a_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + c_3 t_3^n$$

con c_1, c_2, c_3 costanti da determinare in base alle condizioni iniziali (3). Per la soluzione reale t_1 si ha: $1<t_1<2$ e per ottenere un valore approssimato abbiamo utilizzato due metodi: il metodo delle corde ed il metodo delle tangenti.

Abbiamo elaborato un programma in linguaggio BASIC per ognuno dei due metodi, utilizzando variabili e costanti in doppia precisione. Con il metodo delle corde abbiamo ottenuto il valore maggiormente affidabile t_1 = 1,839286 alla settima iterazione ed il valore migliore, ma che non riteniamo molto affidabile, t_1 = 1,83928671 all'ottava iterazione. Con il metodo delle tangenti, alla terza iterazione è stato ottenuto il valore migliore di t_1 = 1,83928690 ed anche il valore più affidabile t_1 = 1,839286. Gli errori di calcolo dovuti all'approssimazione del computer non ci hanno consentito di ottenere valori maggiormente affidabili.

Le altre due radici dell'equazione caratteristica sono complesse e coniugate; posto $t_2=\beta+i\Gamma$, $t_3=\beta-i\Gamma$, si ottiene, con l'approssimazione di 10^{-5},

$-0,41965 < \beta < -0,41964$; $0,60628 < \Gamma < 0,60629$.

Posto c_2 = h+ik, c_3 = h-ik, imponendo le condizioni iniziali (3), si ottiene $0,18280 < c_1 < 0,18280$,

$-0,09140 < h < -0,09140$; $0,20646 < k < 0,20647$.

Se si ricorre alla forma trigonometrica dei numeri complessi ed alla formula di De Moivre, la (13) si può scrivere in forma diversa: posto $\sigma=\sqrt{\beta^2+\Gamma^2}$ e $\Theta=\mathrm{arctg}\,\Gamma/\beta$, si ha

$$a_n =$$
$$= c_1t_1^n+(h+ik)\sigma^n(\cos n\Theta+i\,\mathrm{sen}\,n\Theta)+(h-ik)\sigma^n(\cos n\Theta-i\,\mathrm{sen}\,n\Theta)$$

con $|\varepsilon_n| = \sigma^n|h\cos n\Theta-k\,\mathrm{sen}\,n\Theta|<½$, cioè

$$a_n = c_1t_1^n + \varepsilon_n$$

4- STUDIO DELLA SERIE $\sum_1^\infty{}_n\ a_nx^n$.

Consideriamo ora la serie di potenze

$$\sum_1^\infty{}_n\ a_nx^n \tag{12}$$

i cui coefficienti sono i numeri individuati dalla (2) con a_1, a_2, a_3 numeri naturali prefissati.Tale serie converge per $x=0$ e converge a zero. Per il calcolo del raggio di convergenza, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{c_1t_1^{n+1} + \varepsilon_{n+1}}{c_1t_1^n + \varepsilon_n} = t_1$$

ed allora la serie (12) converge per $|x|<1/t_1 = x_1$ e non converge per $|x|=x_1$, in quanto per $x=x_1$ ed $x=-x_1$ si ottengono le due serie

$$\sum_1^\infty{}_n\ c_1 \quad e \quad \sum_1^\infty{}_n\ (-1)^nc_1$$

non convergenti. Allora per $|x|<x_1$ si può porre

$$a_1x + a_2x^2 +\ldots+ a_nx^n +\ldots = S(x). \tag{13}$$

Per ottenere esplicitamente $S(x)$ moltiplichiamo la (13) successivamente per x, x^2, x^3. Si ha

$$a_1x^2 + a_2x^3 +\ldots+ a_nx^{n+1} +\ldots= xS(x) \tag{14}$$

$$a_1x^3 + a_2x^4 +\ldots+ a_nx^{n+2} +\ldots = x^2S(x) \tag{15}$$

$$a_1x^4 + a_2x^5 +\ldots+ a_nx^{n+3} +\ldots = x^3S(x) \tag{16}$$

Ora, sottraendo le (14), (15), (16) dalla (13), ricordando la (2), si ha, sempre per $|x|<x_1$

$$S(x) = \frac{a_1x + (a_2-a_1)x^2 + (a_3-a_2-a_1)x^3}{1-x-x^2-x^3}.$$

Imponendo le condizioni (3) si ottiene

$$S(x) = \frac{x^2}{1-x-x^2-x^3} \tag{17}$$

da cui, in particolare,

$$S(½) = 2 = \sum_{1}^{\infty}{}_n (½)^n.a_n.$$

Imponendo come condizioni

$$a_1=0,\ a_2 = a_3= a \quad (a\varepsilon N) \tag{18}$$

anzichè le (3), si ottiene per $S(x)$ l'espressione

$$S(x) = \frac{ax^2}{1-x-x^2-x^3} \tag{19}$$

La funzione (19) risulta somma anche di altre serie di funzioni su tutto l'asse reale privato del punto $x=x_1$. Infatti, poichè

$$\frac{x^2}{1-x-x^2-x^3} = \frac{x^2}{x_1(x^2+kx+t_1)}\cdot\frac{1}{1-x/x_1}$$

con $k \approx 1,54369$, allora per $|x|<x_1$, risulta

$$S(x) = \frac{ax^2}{x^2+kx+t_1}\cdot \sum_{0n}^{\infty} t_1{}^{n+1}.x^n.$$

Ancora, poichè

$$S(x) = \frac{ax}{x^2+kx+t_1}\cdot\frac{1}{x_1/x-1},$$

allora, per $|x|>x_1$, si ha

$$S(x) = \frac{-ax}{x^2+kx+t_1}\cdot \sum_{0n}^{\infty} (x_1/x)^n.$$

5- LA TRASFORMATA DI MC LAURIN DI UNA SUCCESSIONE.

Siano $f(n)$ e $g(n)$ due successioni reali definite per $n\varepsilon N$, e nello stesso intervallo $I\subset R$ risulti

$$F(x) = \sum_{0n}^{\infty} f(n)x^n \;, \qquad G(x) = \sum_{0n}^{\infty} g(n)x^n.$$

Allora la serie prodotto secondo Cauchy delle due serie converge, nello stesso intervallo, alla funzione $F(x)$. $G(x)$ ed il coefficiente di x^n nella serie prodotto è dato da

$$f(n)*g(n) = \sum_{r=0}^{n} f(r)g(n-r).$$

Le funzioni $F(x)$ e $G(x)$ vengono chiamate anche le <u>trasformate di Mc Laurin</u> delle successioni $f(n)$ e $g(n)$ e vengono indicate, rispettivamente con $M\{f(n)\}$ e $M\{g(n)\}$.

Se si indica con $f(n) = a(n)$ l'elemento generico della (2), con $n^{(r)}$ il prodotto $n(n-1)\dots(n-r+1)$, si dimostra che, cfr [4],

$$M\{(n+r)^{(r)}\} = \frac{d^r F}{dx^r}. \tag{20}$$

Per altre proprietà delle trasformate di Mc Laurin cfr.[4] e la bibliografia ivi contenuta.

Stabiliamo ora il seguente

<u>Teorema</u>: Se $F(x) = M\{f(n)\}$ e $G(x) = M\{g(n)\}$, si ha, per $s=0,1,2,3$

$$M\{f(n)*g(n+s)\} = \begin{cases} F(x)G(x) & s=0 \\ F(x)\dfrac{G(x) - \sum_{i=0}^{s-1} g(i)x^i}{x^s} & s=1,2,3 \end{cases}$$

Dim: per s = 0,1,2 cfr.[4]. Per s=3 basta tener presente che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} g(r)x^r = G(x),$$

che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} g(r+3)x^r = \frac{G(x)-g(2)x^2-g(1)x-g(0)}{x^3}$$

e ricordare il prodotto secondo Cauchy di due serie.

6- L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE COLLEGATA ALLA RELAZIONE DI RICORRENZA.

Determiniamo ora, partendo dalla relazione di ricorrenza (2) scritta come $a(n+3) - a(n+2) - a(n+1) - a(n) = 0$, l'equazione differenziale che con apposite condizioni relative al punto $x_0=0$, ammette una ed una sola soluzione soddisfacente le condizioni iniziali imposte. Tale soluzione dovrà essere definita in un opportuno intorno U di $x_0=0$ e risultare ivi sviluppabile in una serie convergente di potenze intere di x. Come è noto, cfr [4], Teorema I, l'equazione differenziale cercata dovrà risultare lineare, cioè del tipo

$$c_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + c_0(x)y = b(x),$$

inoltre dovrà ammettere come soluzione, per $x=0$, la funzione (17) con le condizioni (3).

Secondo quanto esposto in [4], basta introdurre quattro serie di potenze convergenti in U i cui coefficienti non tutti nulli A_{rs} $(s=0,1,2,3)$ soddisfino, per ogni n e per ogni r, le relazioni di ricorrenza

$$\sum_{0}^{3}{}_{s} \sum_{0}^{n}{}_{r} A_{sr}\frac{(s+n-r)!}{(n-r)!}a(s+n-r) = \sum_{0}^{3}{}_{s} c_s(n)a(n+s). \qquad (21)$$

Da notare che la (21) non determina univocamente i coefficienti in questione a partire dalla conoscenza dei $c_k(n)$ ed $a(n)$.

Ponendo quindi

$$A_{01} = A(i);\ A_{11} = B(i);\ A_{21} = D(i);\ A_{31} = E(i);$$

si ottiene

$$\sum_{1}^{n}{}_{r} \Big[A(r)a(n-r)+B(r)\frac{(n-r+1)!}{(n-r)!}a(n-r+1)+D(r)\frac{(n-r+2)!}{(n-r)!}\cdot$$

$$.a(n-r+2)+E(r)\frac{(n-r+3)!}{(n-r)!}a(n-r+3)\Big] = \sum_{0}^{3}{}_{s} c_s(n)a(n+s),$$

cioè

$$\sum_{1}^{n}{}_{r} [A(r)a(n-r) + B(r)(n-r+1)a(n-r+1) + D(r)(n-r+2).$$
$$.(n-r+1)a(n-r+2) + E(r)(n-r+3)(n-r+2)(n-r+1).$$
$$.a(n-r+3)] = 0. \qquad (22)$$

Applicando ora la trasformazione di Mc Laurin al primo membro della (22), indicando con $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$ le trasformate di $A(r)$, $B(r)$, $D(r)$, $E(r)$, con y la trasformata di Mc Laurin della successione (2) con le condizioni (3), tenendo presente il teorema precedente e la (22), si ottiene l'equazione differenziale

$$\alpha(x)y + \beta(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \sigma(x)\frac{d^3y}{dx^3} = 0. \tag{23}$$

Dal momento che sono possibili diverse scelte di α,β,μ,σ, possiamo porre $\beta(x) = -1$, $\mu = \sigma = 0$, ottenendo per $\alpha(x)$ l'espressione

$$\alpha(x) = \frac{2-x+x^3}{x-x^2-x^3-x^4}.$$

Allora la (23) diventa

$$-\frac{dy}{dx} + \frac{2-x+x^3}{x-x^2-x^3-x^4}\,y = 0. \tag{24}$$

Da notare che alla (24) medesima si sarebbe arrivati anche se invece delle condizioni (3) avessimo posto le condizioni (18).

Si può verificare facilmente che, se $y(x)$ è soluzione della (30) con le condizioni

$$y(0)=0, \quad y(x)=\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$$

in un opportuno intorno dell'origine, allora dalla relazione

$$-\sum_{2}^{\infty} n a_n x^{n-1}(x-x^2-x^3-x^4) + \sum_{1}^{\infty} a_n x^n(2-x+x^3) = 0$$

si ottiene, annullando il coefficiente di x^n, che i numeri a_n verificano la relazione (2) e le condizioni (3).

Questo lavoro è il risultato della collaborazione dei tre Autori. Va precisato, se si intendono individuare i singoli contributi, che la stesura dei paragrafi 2 e 4 è dovuta essenzialmente a C. Viola; quella del paragrafo 3 a L. Olivieri; quella dei paragrafi 5 e 6 a B. Barigelli.

B I B L I O G R A F I A

[1] B.BARIGELLI, E.VICHI e C.VIOLA, "Sulle serie di funzioni che hanno per coefficienti i numeri di Fibonacci", **Quad. Ist. Matematica e Statistica, Fac. Ec. e Commercio.- Un. Ancona**, n.20 (1988).

[2] B.BARIGELLI, E.VICHI e C.VIOLA, "Numeri di Fibonacci di ordine superiore", **Quad. Ist. Matematica e Statistica, Fac. Ec. e Commercio.- Un. Ancona**, n.33 (1990).

[3] B.BARIGELLI e C.VIOLA, "I numeri di Fibonacci generalizzati e le equazioni differenziali", **Quad. Ist. Matematica e Statistica, Fac. Ec. e Commercio.- Un. Ancona**, n.35 (1990).

[4] E.PESSA e B.RIZZI, "Relazioni di ricorrenza ed equazioni differenziali", **Periodico di Matematiche**, (1987), 3-22.

[5] C.VIOLA, "Equazioni alle differenze finite", **CLUA Ed., Ancona,** (1981).

[6] N.VOROBIEV, "Caracteres de divisibilitè. Suite de Fibonacci", **Ed. MIR, Mosca"**, (1973).

Bruno BARIGELLI Luca OLIVIERI Clara VIOLA

Ist. Mat. e Stat.
Facoltà Economia e Comm.
-Università Ancona-
Via Pizzecolli, 37 - 60100 - ANCONA -

Barigelli Bruno: Associato di Matematica Generale nell'Università di Ancona, si occupa di problemi connessi con le relazioni di ricorrenza, in particolare i numeri di Fibonaci e di problemi relativi alla Programmazione matematica non lineare. E' autore di numerose pubblicazioni a carattere scientifico ed a carattere didattico. E' socio della AMASES, dell'AIRO, dell'UMI.

Olivieri Luca: borsista presso l'Ist. di Matematica e Statistica dell'Univ. di Ancona, si interessa di problemi di Calcolo numerico e di Ricerca Operativa. Autore di una pubblicazione a carattere scientifico e di una a carattere didattico. Ha ottenuto il premio istituito dalla SIP per la Tesi di Laurea nel 1989 sul "Controllo di gestione".

Viola Clara: Stabilizzata di Matematica nell'Università di Ancona, si occupa di problemi connessi con le relazioni di ricorrenza, in particolare i numeri di Fibonacci e di problemi di Ricerca Operativa. E' autore di numerose pubblicazioni a carattere scientifico ed a carattere didattico. E' socio della AMASES.