RATIO MATH. 1.
(1990), 73 - 81

Studio analitico di un modello matematico per le strutture in muratura.

Giuseppe Di Biase* - Antonio Maturo*
(*) Dipartimento di Scienze e Storia dell'Arch., viale Pindaro 42 - Pescara

1. Introduzione

In [1] e in [6] viene presentato un metodo per la determinazione dello stato di tensione e di deformazione nelle murature considerate come materiale non resistente a trazione e sottoposte ad azioni sismiche.

Il problema viene rappresentato da un modello matematico del tipo

$$M\delta'' + K\delta = -Ma \tag{1.0}$$

dove M e K sono matrici quadrate di ordine n, dette rispettivamente, matrici d'**inerzia** e di **rigidezza**, δ è un vettore di ordine n, detto degli spostamenti ed a è un vettore di ordine n, detto delle **accelerazioni del terreno.**

Le matrici M e K soddisfano alle seguenti condizioni:

(1) sono simmetriche;

(2) la M è definita positiva.

Il sistema (1.0) è risolto per mezzo del metodo delle differenze finite.

In questo lavoro mostriamo vari altri metodi per lo studio analitico del modello matematico rappresentato dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$M\delta'' + H\delta' + K\delta = -Ma \tag{1.1}$$

che costituisce una generalizzazione del modello studiato nei lavori citati in [1] e [6].

Nella (1.1) H è una matrice quadrata di ordine n, detta di **smorzamento**. Per $H=0$ si ottiene la (1.0), che corrisponde all'ipotesi di assenza di smorzamento.

2. Metodo della funzione esponenziale.

Poniamo $y_1 = \delta$, $y_2 = \delta'$ e premoltiplichiamo ambo i membri della (1.1) per M^{-1}. Il sistema (1.1) si riduce al sistema del 1° ordine, in 2n incognite;

$$(2.1) \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ M^{-1}K & M^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix}$$

Poniamo:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ M^{-1}K & M^{-1}H \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \quad , \quad Y_0 = \begin{bmatrix} \delta(0) \\ \delta'(0) \end{bmatrix}$$

e supponiamo che A sia non singolare.

Il sistema (2.1) assume la forma:

$$(2.2) \qquad Y' + AY = B$$

e quindi (cfr.[2]) la sua soluzione soddisfacente la condizione iniziale $Y(0)=Y_0$ è data dalla formula:

$$(2.3) \qquad Y = e^{-tA}Y_0 + e^{-tA} \int_0^t e^{uA} B(u)\, du$$

dove, per ogni numero reale t, per definizione è:

(2.4) $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Nella pratica, si presentano notevoli difficoltà nel calcolo della (2.4) a meno che la matrice A non soddisfi a particolari condizioni. Una di esse è, ad esempio, l'esistenza di 2n autovettori linearmente indipendenti di A. In tal caso, infatti, detta S la matrice che ha per colonne tali autovettori e posto $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2n})$, indicato con $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2n})$ la matrice diagonale dei corrispondenti autovalori, si ottiene:

(2.5) $$A = S\ diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n})\ S^{-1}$$

e quindi, per ogni $k \in N_1$,

(2.6) $$A^k = S\ diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{2n}^k)\ S^{-1}$$

Allora, tenuto conto della (2.4) e dello sviluppo in serie della funzione esponenziale, risulta:

(2.7) $$e^{tA} = S\ diag(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \ldots, e^{t\lambda_{2n}})\ S^{-1}$$

La condizione dell'esistenza di 2n autovalori linearmente indipendenti di una matrice A è in genere dedotta dalla simmetria di A. Purtroppo, nel nostro problema, la A è simmetrica se e solo se sono verificate contemporaneamente le condizioni:

(2.8) $M^{-1}K = -I_n$; $M^{-1}H$ è simmetrica,

ciò che, in generale, non avviene.

3. Metodo della trasformata di Laplace.

Consideriamo, per ogni funzione f definita in $[0, +\infty)$ e sommabile in ogni intervallo $[0,a]$, $\forall\ a \in \Re$ l'integrale:

$$(3.1) \qquad F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

con p numero complesso.

Se esiste almeno un $p_o \in C$ tale che esiste finito l'integrale $F(p_o)$, la f(t) si dice L-trasformabile.

Allora si può verificare che (cfr.[9]) esiste un numero reale α, detto **ascissa di convergenza**, tale che l'integrale (3.1) esiste finito per $Re\,(p) > \alpha$ e non esiste finito per $Re\,(p) < \alpha$.

Inoltre la F(p) è una funzione olomorfa nel semipiano $Re(p) > \alpha$, detto **semipiano di convergenza.**

Se la f(t) è L-trasformabile allora la F(p), definita nel semipiano di convergenza, si dice trasformata di Laplace della f(t) e si indica con L[f(t)].

Supponiamo che, per le funzioni che consideriamo, siano soddisfatte le condizioni di esistenza della trasformata e della trasformata inversa. Dal sistema (1.1), prendendo le trasformate di ambo i membri, si ottiene:

$$(3.2) \qquad ML[\delta''] + HL[\delta'] + KL[\delta] = -ML(a),$$

da cui, per la nota formula

$$(3.3) \qquad L[f'(t)] = pL[f(t)] - f(0^+),$$

si ottiene:

$$(3.4) \quad M[p^2 L[\delta] - p\delta(0) - \delta'(0)] + H[pL[\delta] - \delta(0)] + KL(\delta) = \\ = -M\,L(a),$$

ossia

$$(3.5) \quad [p^2 M + pH + K]\, L[\delta] = (pM + H)\delta(0) + M\delta'(0) - ML[a].$$

Si ha quindi:

$$(3.6) \; L[\delta] = (p^2 M + pH + K)^{-1} [(pM + H)\,\delta(0) + M\,\delta'(0) - ML(a)]$$

da cui si ottiene δ come trasformata inversa del 2° membro.

Una delle maggiori difficoltà nel calcolo della (3.6) consiste nella determinazione dell'inversa di $p^2 M + pH + H$.

Il problema si semplifica se vale la seguente condizione:

(I_o) $M^{-1}H$ e $M^{-1}K$ hanno uno stesso insieme di n autovettori linearmente indipendenti.

Ciò è certamente verificato nell'ipotesi considerata nei lavori [1] e [6], in cui $H=0$, di assenza di smorzamento e nell'ipotesi $H=hM$ (smorzamento proporzionale all'inerzia) o $H=rK$ (smorzamento proporzionale alla rigidezza).

Infatti, se vale la (I_o), detti $x_1, x_2, ..., x_n$ gli autovettori indipendenti delle matrici $M^{-1}H$ e $M^{-1}K$, indichiamo con h_i e μ_i i rispettivi autovalori delle due matrici associati ad uno stesso x_i. Se S è la matrice che ha per colonne gli x_i risulta:

$$M^{-1}H = S\ diag(h_1, h_2, \dots, h_n)\ S^{-1}$$

$$M^{-1}K = S\ diag(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)\ S^{-1}$$

e quindi

$$(p^2M + pH + K)^{-1} = [p^2I_n + pS\ diag(h_1, h_2, \dots, h_n)\ S^{-1} + \\ + S\ diag(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)\ S^{-1}]^{-1}M^{-1},$$

da cui

$$(p^2M + pH + K)^{-1} = S\ diag\left[\frac{1}{p^2 + ph_1 + \mu_1}, \dots, \frac{1}{p^2 + ph_n + \mu_\nu}\right] S^{-1}M^{-1}$$

Posto allora:

$$\Lambda = diag\left[\frac{1}{p^2 + ph_1 + \mu_1}, \dots, \frac{1}{p^2 + ph_n + \mu_\nu}\right],$$

dalla (3.6) si ottiene:

(3.7) $\delta = SL^{-1}[p\Lambda]S^{-1}\delta(0) + SL^{-1}[\Lambda]S^{-1}[M^{-1}H\delta(0) + \delta'(0)] - SL^{-1}[\Lambda S^{-1}L[a]]$

Il calcolo di $L^{-1}[p\Lambda]$ e $L^{-1}[\Lambda]$ si riduce a quello noto delle espressioni, per $i=1,2,...,n$:

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+p\,h_i+\mu_i}\right], \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+p\,h_i+\mu_i}\right].$$

Come per il metodo della funzione esponenziale può sorgere qualche difficoltà nella determinazione degli autovalori h_i e μ_i dovute al fatto che le matrici $M^{-1}H$ e $M^{-1}K$ non sono, in generale, simmetriche.

4. Metodo della bidiagonalizzazione

Le difficoltà che si presentano nei due metodi precedenti possono essere superate utilizzando la teoria della bidiagonalizzazione ed opportune trasformazioni di coordinate in $\Re^n$.

Poichè M è simmetrica e definita positiva, esiste una matrice V, non singolare di ordine n, tale che:

$$V^t M V = I_n, \tag{4.1}$$

dove V^t è la trasposta di V.

Infatti, siano $m_1, m_2, ..., m_n$ gli autovalori di M e $x_1, x_2, ..., x_n$ i corrispondenti autovettori, che si possono asssumere di norma unitaria e a due a due ortogonali.

La matrice Q che ha per colonne i vettori $x_1, x_2, ..., x_n$ è allora ortogonale.

Segue quindi che:

$$Q^t M Q = Q^{-1} M Q = \mathrm{diag}(m_1, m_2, ..., m_n). \tag{4.2}$$

Posto:

$$D = diag\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \frac{1}{\sqrt{m_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_n}}\right), \tag{4.3}$$

segue che:

$$(QD)^t M (Q D) = I_n \tag{4.4}$$

e quindi, posto $V = Q D$, si ottiene la (4.1).

Premoltiplicando ambo i membri della (1.1) per V^t ed eseguendo il cambio di variabile:

$$\delta = V Y, \tag{4.5}$$

con $Y \in \mathfrak{R}^n$, la (1.2) diventa:

$$Y'' + A_1 Y' + A_2 Y = B, \tag{4.6}$$

con $A_1 = V^t H V$, $A_2 = V^t K V$, $B = - V^t M a$.

Le matrici A_1 e A_2 sono simmetriche e ciò facilita la soluzione della (4.6) con il metodo della funzione esponenziale o con quello della trasformata di Laplace.

Vogliamo però mostrare come, sotto condizioni abbastanza generali su A_1 e A_2, si può studiare il modello matematico in maniera molto semplice e da un punto di vista estremamente significativo.

Assumiamo la seguente ipotesi:

> (J_o) A_1 e A_2 hanno lo stesso insieme di n autovettori linearmente indipendenti.

La (J_o) ammette, come casi particolari, molte situazioni di notevole importanza fisica, quali ad esempio le seguenti, con h, r, s, t numeri reali e p, q numeri interi:

(1) $H = 0$ (assenza di smorzamento);

(2) $H = h M$ (smorzamento proporzionale all'inerzia);

(3) $H = r K$ (smorzamento proporzionale alla rigidezza);

(4) $A_1 = s (A_2)^p$;

(5) $A_2 = t (A_1)^q$.

Ammesso che valga la (J_o), sia P una matrice che ha per colonne gli autovettori linearmente indipendenti di A_1 e A_2.

Poniamo:

$$D_1 = \mathrm{diag}(h_1, h_2, ..., h_n), \qquad D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n). \tag{4.7}$$

Premoltiplicando la (4.6) per P^{-1} si ottiene:

(4.8) $$P^{-1} Y'' + P^{-1} A_1 Y' + P^{-1} A_2 Y = P^{-1} B.$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile

(4.9) $$Y = P Z,$$

con $Z \in \Re^n$. Poichè:

(4.10) $$P^{-1} A_1 P = D_1 , \qquad P^{-1} A_2 P = D_2,$$

dalla (4.8) si ottiene:

(4.11) $$Z'' + D_1 Z' + D_2 Z = P^{-1} B.$$

Il sistema (4.11) è formato da n equazioni differenziali ciascuna con una sola incognita. In forma estesa, posto

(4.12) $$P^{-1} B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

esso si scrive:

(4.13) $$\begin{cases} z''_1 + h_1 z'_1 + \mu_1 z_1 = b_1 \\ z''_2 + h_2 z'_2 + \mu_2 z_2 = b_2 \\ \dots\ \dots\dots\ \dots\dots\ \dots \\ \dots\ \dots\dots\ \dots\dots\ \dots \\ z''_n + h_n z'_n + \mu_n z_n = b_n. \end{cases}$$

Calcolato Z, dalle (4.6) e (4.9) si ottiene:

(4.14) $$\delta = V P Z.$$

Le (4.13) e (4.14) permettono di studiare facilmente il modo di variare delle soluzioni al variare del vettore $P^{-1} B$ dei termini noti o dei coefficienti h_i e μ_i.

Poichè

(4.15) $$P^{-1} B = - P^{-1} V^{-1} a,$$

se a ha come componenti delle funzioni periodiche moltiplicate per funzioni esponenziali è possibile applicare ad ogni singola equazione del sistema (4.13) la teoria delle oscillazioni forzate di un oscillatore semplice e quindi, in particolare, trovare le condizioni per la risonanza del sistema.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.A.Anselmi,L.Fino: **Un modello matematico per le strutture in muratura** - VI Congresso ICOMOS, 1981

[2] T.M. Apostol: **Calcolo II** - Boringhieri, 1982

[3] J.H.Argyris: **Finite element linear and non linear analysis, methods and general purpose programs** - Stresa, 1975

[4] F.Ayres: **Matrici** - Etas, 1974

[5] D.M.Biggs: **Introduction to structural dynamics** - New York, 1964

[6] M.D'Anselmo, A.De Leonardis, A.Fusilli: **Strutture in muratura in campo dinamico** - Atti del Sesto Congresso Internazionale sulle murature in mattoni, Roma 1982

[7] G.Di Biase, A.Maturo: **Algoritmi e programmi per la risoluzione numerica di un modello matematico per le strutture in muratura** - Ratio Math 2, in corso di stampa

[8] F.Eugeni: **Alcune proprietà delle trasformazioni conformi** - Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena, vol.II, 1967

[9] D.Greco: **Complementi di analisi** - Liguori, Napoli, 1967

[10] H.Haut: **Programmi di matematica e statistica in basic** - Jackson, 1982

[11] S.Lipschutz: **Algebra lineare** - Etas, 1975

[12] J.C.Mason: **Basic matrix methods** - Butterworths, 1984

[13] A.Maturo: **Metodi matematici per l'analisi statistica dei dati** - Montefeltro, Urbino, 1981

[14] A.Maturo: **Argomenti di matematica applicata, vol.I** - Montefeltro, Urbino, 1983

[15] E.Pessa, B.Rizzi: **Relazioni di ricorrenza ed equazioni differenziali** - Periodico di Matematiche n.2-3, 1987

[16] E.Pessa, B.Rizzi: **L'integrazione per serie delle equazioni differenziali ordinarie: aspetti e problemi** - Periodico di Matematiche n.4, 1986

[17] P.Pozzati: **Teoria e tecnica delle costruzioni** - Utet, 1982

[18] G. e M.Romano: **Sul calcolo delle strutture ad arco non resistenti a trazione** - Istituto di Scienza delle Costruzioni Facoltà Ingeneria, Napoli, 1979

[19] H.Sandy: **Discrete methods in some linear dynamic problems** - Symposium on Discrete methods in Ingeneering, Milano, 1974

[20] L.Santoboni: **La trasformata di Laplace in alcune operazioni finanziarie** - Quaderni di Statistica e Matematica Applicata Facoltà Economia e Commercio, Perugia, 1981

[21] C.B.Saw: **Finite element analysis of masonry walls on beams** - Symposium on Discrete methods in Engineering, Milano, 1974

[22] O.C.Zienkiewicz: **The finite elements method in engineering science** - London, 1971