RATIO MATH. 1.
(1990), 133 - 138

Di Tassi e di Tasse

Lorenzo Peccati
Università degli studi di Torino e Università "L.Bocconi" di Milano

0. INTRODUZIONE

L'uso di un metodo ([1]), proposto dallo scrivente, per lo svolgimento di interessanti analisi finanziarie sia di singole operazioni, sia di portafogli di operazioni, conduce a cercare sotto quali condizioni la messa in conto delle imposte non alteri troppo la struttura dell'insieme dei tassi interni di un'operazione finanziaria.

Nel n. 1 il problema sarà impostato, nel n. 2 si forniscono semplici condizioni sufficienti affinché l'eccessiva alterazione non avvenga. Nel n. 3 si indicano alcune direzioni di approfondimento promettenti.

1. IL PROBLEMA

Si consideri un'operazione finanziaria (o.f. nel seguito) con funzione cumulativa dei flussi L: $R_+ \to R$ essendo R_+ l'insieme dei numeri reali non negativi. L(t) denota così la somma algebrica dei flussi con scadenza non oltre t. È naturale ([2]) assumere L a variazione limitata su R_+, cosicché si possa pensarla come differenza tra le due funzioni cumulative delle entrate e delle uscite. Assumerò in tutto questo lavoro che su R_+ L sia monotona non decrescente. Altre ipotesi saranno $L(0) = -1$ e $L(+\infty) < +\infty$.

Il Discounted Cash-Flow per tale o.f. è:

$$G(\delta) = -1 + \int_0^{+\infty} exp(\delta t)\, dL(t)$$

intendendo l'integrale nel senso di T.J. Stieltjes. La funzione $\Gamma(\delta)$ sarà definita per $\delta > \delta_o$. Assumerò $\delta = -\infty$. È evidente che da $G(0) = L(+\infty) > 0$ e da $G(+\infty) = -1$ discende l'esistenza di almeno un tasso interno δ^* per l'o.f. La monotonia di G ne garantisce l'unicità.

Tutto questo "prima delle tasse". L'effetto dell'impostazione fiscale può essere modellizato, almeno in prima battuta, come segue. Sia $A: R_+ \to R$ la funzione con il seguente significato: $A(t)$ è la parte del costo iniziale (unitario per semplicità) "deducibile" entro t. Assumerò A monotona non decrescente, con $A(+\infty) \leq 1$. Suppongo, altresì che l'"imponibile" sia sempre non negativo, ossia che la funzione differenza $N = L - A: R_+ \to R$, ovviamente a variazione limitata, sia monotona non decrescente. L'"imponibile" in t è allora $dN(t)$. Su tale "imponibile" viene calcolata l'imposta $\lambda\, dN(t)$. Tale prelievo è materialmente effettuato $h(t)$ unità di tempo più tardi (assumerò dunque $h(t) \geq 0$ anche se in concreto può imteressare h di segno qualunque a causa del giuoco degli acconti).

Il valore scontato in 0 dei versamenti a titolo d'imposta sarà:

$$\lambda I(\delta) = \lambda \int_0^{+\infty} \exp(-\delta(t + h))\, dN(t)$$

ove $I(t)$ è il valore scontato in 0 a tasso δ degli "imponibili" relativi all'operazione in esame.

Il DCF "dopo le tasse" riesce allora:

$$\Gamma(\delta) = G(\delta) - \lambda I(\delta)$$

Grossolanamente si può descrivere l'effetto delle imposte dicendo che abbassano i valori di Γ rispetto a G e pertanto la radice δ^* diventa $\delta^{**} < \delta^*$. Tale tasso δ^{**} è proprio quello che serve per l'applicazione del metodo proposto dallo scrivente ([3]).

In realtà il problema non è così semplice perché il passaggio da G a Γ altera la struttura dell'insieme dei tassi interni per l'o.f.. Si può, per esempio, elementarmente provare ([4]) che se gli ultimi flussi dell'o.f. "dopo le tasse" sono imposte allora anche se G ammette, come nel nostro caso, una sola radice δ^* e se, sperabilmente, le imposte non si portano via tutto il profitto, allora Γ ne ammmette almeno due, la minore delle quali, δ_0, è negativa. L'interpretazione di δ_0 è piuttosto evidente: l'o.f. "dopo le tasse" acquista un segmento terminale con natura di finanziamento il cui tasso si riflette in δ_0. Di ciò ci si può convincere studiando il DCF di un'operazione modificata ove si sostituiscono ai valori L(t) i valori 1 + L(t).

Dal punto di vista che m'interessa in questa sede la radice δ_0 non provoca alcun fastidio, nel senso che δ^{**} è il tasso da utilizzare per lo svolgimento dell'analisi economico-finanziaria citata. Altro paio di maniche se tra 0 e δ^* cadesse più di una radice di Γ. Che questo possa accadere per i livelli di λ sufficientemente elevati non può, per quanto so, essere escluso. Intendo fornire condizoni sufficienti acciocché questo non accada, ossia, affinchè $\Gamma(\delta) = G(\delta)\text{-}\lambda I(\delta)$ possegga un solo zero δ^{**} tale che $0 \le \delta^{**} \le \delta^*$. Per $\lambda = 0$ questo è banalmente garantito, interessa dunque studiare il problema per $0 < \delta^{**} \le \delta^*$. Sarà naturale cercare limitazioni superiori per λ affinché sia garantita tale unicità. Altre interessanti limitazioni potranno venire dalla richiesta che i pagamenti delle imposte non siano troppo lontani nel tempo dalle epoche di conseguimento dei redditi che le determinano.

2. CONDIZIONI SUFFICIENTI

Da:

$$G(\delta) = -1 + \int_0^{+\infty} exp(-\delta t)\, dL(t)$$

si trae con facili calcoli che su ogni intervallo $(\eta, +\infty)$, con $\eta > 0$, G è differenziabile e riesce:

$$G'(\delta) = -\int_0^{+\infty} t \ exp(-\delta t)\, dL(t)$$

Sarà, come già osservato, $G'(\delta) < 0 \ \forall \ \delta \in (0, +\infty)$.
Analogamente si ottiene:

$$G''(\delta) = \int_0^{+\infty} t^2 \ exp(-\delta t)\, dL(t)$$

Risulta, nelle nostre ipotesi, $G''(\delta) > 0$. E, già dalla negatività di $G'(\delta)$ scende esistenza ed unicità di δ^*.

Da:

$$I(\delta) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\delta\,(t + h(t))\right)\, dN(t)$$

si ha facilmente:

$$I'(\delta) = -\int_0^{+\infty} (t + h(t)) \exp\left(-\delta\,(t + h(t))\right)\, dN(t)$$

$$I''(\delta) = -\int_0^{+\infty} (t + h(t))^2 \exp\left(-\delta\,(t + h(t))\right)\, dN(t)$$

Se ne trae $I'(\delta) < 0$, $I''(\delta) > 0$.

Una prima semplice condizione sufficiente per l'unicità di δ^{**} in $(0,\delta^*)$ è la negatività di $\Gamma'(\delta)$ su tale intervallo.

Poiché: $\Gamma'(\delta) = G'(\delta) - \lambda I'(\delta)$, osservato che, con riferimento all'intervallo da 0 a δ^*, la funzione G' è minima in δ^* e la funzione I' è massima in 0, $\Gamma'(\delta) < 0$ sull'intervallo rilevante se:

$$G'(\delta^*) - \lambda I'(0) \leq 0$$

ossia se:

$$\lambda \leq \lambda^* = G'(\delta^*) / I'(0)$$

È ben noto che $G'(\delta^*)$ coincide con $\Delta_L(\delta^*)$, la duration a tasso δ^* del cash-flow in entrata dell'impiego. Si ha poi:

$$I'(0) = -\int_0^{+\infty} (t + h(t))\, dN(t)$$

e per il confine superiore λ^* per λ vale la rappresentazione

$$\lambda^* = \frac{\Delta_L(\delta^*)}{\int_0^{+\infty} (t + h(t))\, dN(t)}$$

Il denominatore può scriversi anche come prodotto della scadenza media aritmetica τ delle imposte moltiplicata per l'imponibile totale. Tale scadenza media aritmetica è ponderata con gli imponibili (o, che è lo stesso, con le imposte):

$$\int_0^{+\infty} (t + h(t))\, dN(t) = \tau\, (N(+\infty)) - (N(0)) = \tau\, N(+\infty)$$

La condizione trovata è sicuramente semplice, ma potrebbe essere troppo restrittiva. Essa, infatti, impegna l'andamento di Γ su tutto l'intervallo $(0,\delta^*)$. Si ottiene una condizione meno esosa chedendo che in ogni radice δ^{**} in tale intervallo riesca $\Gamma'(\delta^{**}) < 0$.

Da $G'(\delta^{**})\text{-}\lambda I(\delta^{**}) < 0$, atteso che $G(\delta^{**})\text{-}\lambda I(\delta^{**}) = 0$, si ottiene, rammentato quanto sappiamo sui segni di G e I:

$$D \ln G(\delta^{**}) < D \ln I(\delta^{**})$$

ove D indica derivazione rispetto al tasso. Quest'ultima condizione può essere riscritta in maniera interessante in termini di durate medie finanziarie dei ricavi provenienti dall'operazione principale e di flussi di cassa da imposte.

Basta osservare che:

$$D \ln G(\delta) = G'(\delta) / G(\delta) = -\Delta_L(\delta)(1 + G(\delta)) / G(\delta)$$

e che:

$$D \ln I(\delta) = -\Delta_I(\delta)$$

ove $\Delta_I(\delta)$ è la duration a tasso δ del cash-flow delle imposte.

La condizione di negatività di Γ in ogni punto δ^{**} ove sia anche $\Gamma(\delta^{**}) = 0$, si riduce a:

$$\Delta_I(\delta^{**}) < \Delta_L(\delta^{**})(1 + G(\delta^{**})) / G(\delta^{**})$$

di interpretazione finanziaria estremamente facile. Se la prima condizione data garantiva l'unicità di δ^{**} chiedendo che le imposte non fossero troppo alte, questa chiede che non siano troppo differite nel tempo.

Da quest'ultima condizione si possono trarre criteri di semplici applicazioni minorando il secondo membro e maggiorando il primo. Una minorazione per il secondo membro può ottenersi osservando che $\Delta_L(\delta^{**})$ non può essere inferiore a $\Delta_L(\delta^*)$ e che l'altro fattore supera certamente $1/G(0) = 1/L(+\infty)$. Osservato altresì che il primo membro della disuguaglianza è maggiorato dalla scadenza media aritmetica delle entrate $z = \int_0^{+\infty} t\, dN(t)/N(+\infty)$, *basta che:*

$$z < \Delta_L(\delta^*)/L(+\infty)$$

Quest'ultima condizione appare invero di agevole controllo.

3. ULTERIORI DIREZIONI DI RICERCA

Appare di un certo interesse considerare profili L che ben descrivono operazioni finanziarie concrete, funzioni di ritardo (o anticipo, a causa degli acconti) h e controllare attraverso le due condizioni indicate, o altre ancora, se sia per essi garantita l'unicità del tasso interno positivo "dopo le tasse".

NOTE

([1]) Peccati (1987), Cerquetti (1988), Peccati (1989), Peccati (1990).

([2]) Si veda Castagnoli, Peccati (1973).

([3]) Peccati (1989)., Peccati (1990).

([4]) Castagnoli (1983)

BIBLIOGRAFIA

E. CASTAGNOLI, L.PECCATI (1973): 'Alcune osservazioni sulla classificazione degli investimenti'. **Giornale degli Economisti e Annali di Economia.**

E. CASTAGNOLI (1983): 'Di tassi e di tasse'. **Notiziario Economico Bresciano.**

A .CERQUETTI (1988): 'Tassi medi di rendimento di obblogazioni singole e in portafoglio'. Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica, Un. degli studi "G.D'Annunzio", Fac. di Econ. e Comm., Chieti.

L .PECCATI (1987): 'DCF e risultati di periodo'. Atti dell'XI Convegno AMASES, Torino-Aosta.

L .PECCATI (1989): 'La misurazione del rendimento medio di un portafoglio', **in corso di stampa.**

L. PECCATI (1990): 'Valutazioni finanziarie analitiche e sintetiche', in corso di stampa nei "Quaderni della Rivista Milanese di Economia".