Ratio Mathematica, 19, pp. 31-88

I MODELLI MATEMATICI COSTRUITI PER L'INSEGNAMENTO DELLE MATEMATICHE SUPERIORI PURE E APPLICATE

Nicla Palladino[1] – Franco Palladino[1]

Sunto. Nell'articolo che si presenta si vuole documentare, alla luce delle ricerche fino ad oggi condotte, anche per vari siti distribuiti in Europa, la vicenda dei modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle "Matematiche superiori" –pure e applicate– e realizzati nel periodo di maggior impegno creativo che va, all'incirca, dalla seconda metà dell'Ottocento agli anni Trenta del Novecento. Nel corso dell'esposizione si verranno, inoltre, ad evidenziare, con brevi descrizioni e servendosi di opportuni esempi, una varietà di legami, tutti molto rilevanti, che mettono in corrispondenza l'ideazione e la costruzione dei modelli con studiosi, istituzioni culturali, specifiche visioni della ricerca e della didattica delle scienze matematiche e, ancora, con il mondo delle arti figurative.

Abstract. In this paper, we want to document the history of the models of mathematical surfaces used for the didactics of pure and applied "High Mathematics", in Italy and in Europe. These models were built between the second half of nineteenth century and the 1930s. We want here also to underline several important links that put in correspondence conception and construction of models with scholars, cultural institutes, specific views of research and didactical studies in mathematical sciences and with the world of the figurative arts furthermore, by using short descriptions and opportune examples.

Parole chiave: matematica, modelli, storia, arte, esposizioni.

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica. Università degli Studi di Salerno.

1. I modelli matematici realizzati (essenzialmente in Europa) in un intervallo di tempo che è delimitabile, con buona approssimazione, tra gli inizi della seconda metà dell'Ottocento e gli anni Trenta del Novecento, rappresentarono i prodotti di un'impresa culturale che coinvolse alcuni dei più attivi istituti matematici presenti presso le università e i politecnici europei. Essa vide impegnati personaggi di prim'ordine applicati alle scienze matematiche e fu feconda di interazioni con la ricerca e la didattica, di "ordine superiore" (con favorevoli ricadute per l'insegnamento preuniversitario), praticate in queste scienze. L'impresa coinvolse anche importanti centri museali d'Europa e, in aggiunta, i modelli matematici, nel loro diffondersi, intrecciarono interessanti legami perfino col settore delle arti figurative e il mondo del cinema allorché caddero sotto lo sguardo sensibile di scultori, pittori e scenografi.

Le ricerche, condotte dagli autori di questo lavoro, sui modelli matematici e sui molteplici aspetti, prima indicati, connessi alla loro realizzazione e diffusione, sono venute, nel corso degli anni e partendo dall'Italia, progressivamente ad estendersi a varie sedi d'Europa e naturalmente ad approfondirsi. Nell'insieme delle indagini fatte, uno sguardo si è rivolto anche verso gli Stati Uniti d'America.

Con questo articolo, pur nei limiti di spazio che ne derivano, si vuole dare un quadro più ricco e commentato, ricorrendo a brevi descrizioni e servendosi di alcuni modelli significativi (per i quali si offrono maggiori informazioni), di un'impresa scientifica che oggi ha ritrovato nuovo vigore, grazie alla *computer graphics*, e recuperato (potenziandola poi) integralmente la sua utilità per la didattica della matematica intesa in senso molto ampio.

Tutto lo scritto che si presenta è scrupolosamente documentato mediante dettagliate e numerose note la cui consultazione si può eventualmente rimandare a una seconda, più posata, fase di lettura.

I modelli in questione furono costruiti impiegando materiali diversi: ottone, gesso, cartone, filo metallico o di fibra naturale, legno e lamelle di legno, celluloide (un materiale, ottenuto per sintesi chimica, fondamentale, tra l'altro, per la nascente cinematografia e tempestivamente usato anche per realizzare modelli), lamine metalliche ricoperte per via elettrochimica (con processo di galvanostegia, pur esso, allora, di recente concezione).

Essi servivano a *far vedere* proprietà notevoli riguardanti il tema di ricerca su cui si investigava e a *mostrare* alcuni risultati che progressivamente si conseguivano in diversi settori delle matematiche "pure" e "applicate": Geometria descrittiva e proiettiva, Geometria analitica, Geometria algebrica, Topologia, Teoria delle funzioni (anche a variabile complessa), Meccanica razionale, Fisica-matematica, Scienze delle costruzioni e finanche, per esempio, Ottica applicata alla fisiologia del corpo umano (tra i modelli, vi è, infatti, un'elegante realizzazione di *Oroptera* o *Horopter geometrico* –curva cubica sghemba– in filo metallico[2]) con i suoi collegamenti alla Geometria proiettiva e algebrica.

---

[2] Esso è compreso nella *Serie XXVIII* (*Sechs Modelle zur Theorie der cubischen Raumcurve und ihrer Anwendung in der physiologischen Optik*), n° 6, del *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, edito da Martin Schilling in Leipzig nel 1911 (è questa la settima edizione del *Catalog*, pubblicazione di cui si parlerà più estesamente). Sull' *Horopter* vi è un'interessante informazione comunicata da Luigi Cremona (1830-1903) a Thomas Archer Hirst (1830-1892), lettera datata Bologna 20 dicembre 1864, in cui Cremona scrive:

"A proposito delle cube gobiche [*sic*], se voi consulterete i recenti scritti di Helmholtz e di Hering negli *Annali di Poggerdoff* [*Annalen der Physik und Chemie*, n.d.r.], troverete che l'*Horopter*, cioè il luogo dei punti dello spazio che (per una data posizione degli occhi) projettano imagini identiche sulle due retine, è una cubica gobba: infatti si hanno a considerare due fasci di raggi, i cui centri sono i *punti-nodi* degli occhi: assumendo come omologhi due raggi che incontrano le retine in punti corrispondenti (identici dicono i fisiologi) i due fasci sono omografici, epperò il luogo delle intersezioni de' raggi omologhi è una cubica gobba [un'ellisse cubica, n.d.r.]".

Hirst, nella lettera di risposta (Londra, 27 dicembre 1864), fa presente a questo proposito:

"Your remarks about the Horopter interested me greatly. Some time ago I heard Prof. Helmholtz at the *Royal Society* read a paper on the subject and my curiosity was raised regarding the nature of the curve." (Si veda *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, vol. IV –a cura di L.

Ideati per le "Matematiche superiori" –pure e applicate– e per le Scienze delle costruzioni, i modelli, di cui si tratta, furono pure accompagnati da altri esemplari pensati per migliorare la didattica di quelle discipline che si insegnavano nei primi anni dei corsi universitari –per matematici, fisici e ingegneri–, al fine di potenziare negli studenti la componente intuitiva-visiva compresente nell'apprendimento delle stesse discipline e, specialmente, della geometria: scopo, questo, che è ben riflesso, per segnalare un caso notevole, nel volume di geometria *evidente*, *intuitiva*, vale a dire nell'*Anschauliche Geometrie*, composto da D. Hilbert e S. Cohn-Vossen.[3]

Non dovrebbe suscitare meraviglia che il grande matematico germanico David Hilbert (1862-1943), ricordato a giusta ragione come l'ideatore del moderno metodo assiomatico –dove, si sa, le proposizioni della matematica si concatenano soltanto per mezzo di regole di deduzione accettate come legittime e dove si fa astrazione di tutte le "evidenze" intuitive che i termini, occorrenti nelle proposizioni stesse, possano suggerire alla mente dello studioso–, si sia impegnato anche in questo settore delle scienze matematiche; tra l'altro, egli non sarà l'unico: si potrebbe ricordare ancora, per esempio, Hermann Wiener (1857-1939).

Va tenuto presente, a tal riguardo, che tra la fine dell'Ottocento e i primi anni del Novecento l'enorme sviluppo, qualitativo e quantitativo, delle scienze (comprese le scienze matematiche), della tecnica e della produzione industriale, vissuto dalla Germania, condusse, tra l'altro, a un'accentuata compartimentazione delle scienze medesime e alla specializzazione spinta della figura dello scienziato, e del matematico.

Questo stato di cose –nel settore industriale porterà al *taylorismo*– fu avvertito tempestivamente da Ernesto Pascal –1865-1940–, professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Pavia dal 1890, che aveva soggiornato, dopo la laurea conseguita in Napoli, per un

---

Nunzia–, Quaderni P.RI.ST.EM, Università "L. Bocconi" – Milano, Palermo, 1999, pp. 67 e 68).

[3] Berlin, J. Springer, 1932; traduzione italiana *Geometria intuitiva*, Torino, Boringhieri, 1960.

anno a Gottinga, grazie a una borsa di studio di perfezionamento per l'estero, dove si era fatto apprezzare da Felix Klein[4] –sotto la cui guida si attuò in Germania il prodigioso sviluppo della progettazione e realizzazione dei modelli– allorquando notò che la sua stessa opera, il *Repertorio di Matematiche Superiori* –uscita in due volumi tra il 1898, *Analisi*, e il 1900, *Geometria*–, che tendeva a offrire un quadro completo dei risultati raggiunti nelle "matematiche superiori", era accolta con particolare favore in Germania:[5] lì vige –scrive Pascal, nel

[4] Si possono consultare le lettere *I-13* e *I-14* di Pascal a Federico Amodeo, contenute in F. Palladino, N. Palladino, *Dalla "Moderna geometria" alla "Nuova geometria italiana". Viaggiando per Napoli, Torino e dintorni*, Firenze, Olschki, 2006.

[5] Il *Repertorio*, pubblicato per l'editore Hoepli di Milano, raccoglieva i principali risultati "superiori" maturati, fino a quella data, in *Analisi* e in *Geometria*. Alle edizioni accresciute, succedutesi alla prima, vi collaborarono anche Federigo Enriques (1871-1946) e Francesco Severi (1879-1961). L'uscita del *Repertorio* rappresenterà uno dei molteplici segnali secondo i quali viene riconosciuto che la matematica italiana, in tutti i settori, aveva raggiunto, a quel tempo, uno dei primi posti in Europa. Posizione che occuperà sicuramente nel periodo compreso tra gli ultimi decenni dell'Ottocento e la Prima Guerra Mondiale e che sarà suggellata dall'assegnazione, all'Italia, del *Quarto Congresso Internazionale dei Matematici* (i primi tre si erano tenuti, rispettivamente, a Zurigo, Parigi e nella rinomata università tedesca di Heidelberg nel Land del Baden) celebrato a Roma nel 1908. A proposito del *Repertorio*, ecco quanto scrive lo stesso Pascal in una lettera (Milano, 5 Giugno 1906) diretta al suo conterraneo Ernesto Cesàro (1859-1906):

"[…] Riapro la lettera per annunziarle che del mio *Repertorio* in tedesco [*Repertorium der Höheren Mathematik*, Leipzig, Druck und Verlag von B.G. Teubner, I Theil: *Die Analysis*, 1900, II Theil: *Die Geometrie*, 1902, n.d.r.] si farà la seconda edizione istituendo in Germania un Comitato di redazione, del quale si occuperà il D.r Epstein di Strasburgo, che procederà d'accordo con me. Così si spera di farne una sorta di Opera periodica, ed il mio *Repertorio* diventerà *una specie di istituzione matematica tedesca!* (dico per celia!). Sono contento che esso abbia avuto tanto successo in Germania, ed è curioso che i tedeschi abbiano dovuto ricorrere ad un italiano per un'opera che ora corre per le mani di tutti i loro studenti di matematica. Essa forse risponde *al modo con cui gli studii sono organizzati in Germania, per cui lo* provare a spiegare le ragioni del successo del *Repertorium*– un'organizzazione degli studi, e della ricerca, fin troppo specialistica. E, in tale contesto, sia la *geometria intuitiva* sia la costruzione di modelli plastici (Pascal ne incrementò l'acquisto da parte dell'Università di Pavia e li menzionò più volte nel *Repertorio*) tendono a diventare dei settori che assumono una loro autonomia, collegati alla ricerca e all'insegnamento nel campo delle scienze matematiche.

Ciò precisato, la presenza di Hilbert in "spazi" –come direbbero i matematici– distinti non è da vedersi quindi come un'anomalia (o una "contraddizione") ma è interpretabile piuttosto come segno della vastità del suo ingegno capace di dedicarsi, mantenendo la profondità dello specialista (e con l'aggiunta di una grande laboriosità), a una pluralità di settori: un'attitudine che frequentemente esalta la possibilità di ottenere risultati di valore assoluto, utili per l'intero arco delle scienze matematiche. In particolare, a proposito del tema che in questo articolo si vuole trattare, fu proprio Hilbert a stimolare la progettazione di un modello in gesso, realizzato da Werner Boy (1879-1914), nel 1901, in due versioni, riguardanti la Topologia. (Erano modelli, ideati da Boy –perciò conosciuti poi come *Boysche Fläche, erste und zweite Version*–, destinati a "dimostrare", grazie esclusivamente all'*evidenza* della realizzazione plastica, che era possibile immergere il piano proiettivo reale in uno spazio a tre dimensioni. Entrambe le versioni sono presenti, volendo indicare almeno una sede italiana, all'Università di Napoli).[6]

---

studente tedesco finisce alle volte per essere troppo specialista [il corsivo è aggiunto, n.d.r.], e coll'ignorare molte altre parti della matematica che dovrebbe conoscere." Per questo brano si rimanda a F. Palladino, N. Palladino, *Dalla "Moderna geometria" alla "Nuova geometria italiana". Viaggiando per Napoli, Torino e dintorni*, cit., pp. XIII-XIV.

[6] I due modelli (*Modelle für die Abbildung der projectiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche*), realizzati, all'Università di Gottinga, da Boy –che lì era diventato *Philosophical Doctor* avendo avuto Hilbert come relatore della tesi– in collaborazione col professore, della stessa Università, Friedrich Georg Schilling (1868-1950) –un nome notevole nel campo della costruzione di strumenti e modelli matematici–, furono

L'*Anschauliche Geometrie*, un testo che ancora oggi conserva un elevato interesse, esce, curiosamente, al tempo in cui l'esperienza della progettazione e costruzione dei modelli vive la sua ultima fase e si prepara l'affermazione del bourbakismo che, con la sua radicale proposizione del punto di vista assiomatico in chiave strutturalista,[7] contribuirà alla progressiva estraneazione dagli "istituti di matematica" di strumenti meccanici e modelli plastici i quali vengono chiusi negli armadi o, in alcuni casi, relegati a prendere polvere in soffitte e sottoscala, quando non andranno dispersi a causa di traslochi come accadde, tra la fine degli anni Settanta e gli inizi degli Ottanta del secolo scorso, nell'ambito dell'Università di Pisa.

Una tendenza all'estraneazione che verrà, tra l'altro, a privare l'insegnamento di sussidi didattici che avrebbero potuto dispiegare ancora (si potrebbe aggiungere "come sempre", qualora si venga ad usarli opportunamente) la loro efficacia: bisognerà attendere gli ultimi

---

inseriti ai primi due posti della *Serie XXX*: *Gips-Modelle verschiedener Art* (la serie comprendeva 8 modelli in gesso di vario tipo) del *Catalog* di Martin Schilling (sul quale in seguito si daranno altre informazioni). Lo stesso *Catalog*, nella sua parte seconda (dove viene svolto il commento scientifico delle serie di modelli presentati nella prima parte), include le due superfici sotto l'argomento *Analysis situs*, espressione usata da G.W. Leibniz, e conservata successivamente per lungo tempo, in riferimento a quelle proprietà delle figure che saranno, due secoli dopo all'incirca, studiate nell'ambito della moderna *Topologia.* Una parametrizzazione della *Superficie di Boy* fu trovata, mediante l'utilizzazione del computer, solo nel 1978 da Bernard Morin mentre François Apéry, nel 1984, ne ottenne un'equazione algebrica.

Nella pubblicazione, *Mathematical Models/Mathematische Modelle*, (edizione bilingue, Braunschweig/Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1986, due voll.) curata da Gerd Fischer, sotto il cap. 6, *Models of the Real Projective Plane*, redatto da U. Pinkall, del vol. I (*Commentary*), p. 64 è scritto: "The first *immersion* (i.e. non-singular mapping) of $\mathbf{RP}^2$ into $\mathbf{R}^2$ was constructed in 1901 by W. Boy in Göttingen".

[7] Sull'argomento si può consultare il saggio di G. Israel, *Un aspetto ideologico della matematica contemporanea: il bourbakismo*, incluso in *Matematica e Fisica: struttura e ideologia*, a cura di E. Donini, A. Rossi, T. Tonietti, Bari, De Donato, 1977, pp. 35-70.

decenni del Novecento per vedere reintrodotta la “visione” –che avrà la proprietà, in più, di essere diventata dinamica– nella ricerca e nella didattica delle scienze matematiche, grazie alle possibilità offerte dall’informatica.

Tendenza all’esclusione che non è un fenomeno tipicamente italiano poiché esso parte dai principali paesi europei e sarà comune al resto del mondo: almeno in questo caso non appare attribuibile, per l’Italia, alla opposizione esercitata dall’idealismo di Croce e Gentile nei confronti della filosofia positivista entro la quale maturarono la progettazione e l’uso dei modelli plastici per le scienze matematiche.

Le considerazioni fin qui esposte portano a riflettere che in un intervallo di tempo di circa mezzo secolo trascorso tra la seconda metà dell’Ottocento e gli anni Trenta del Novecento, si passa attraverso due “visioni del mondo”, scientifico-matematico, diverse e contrapposte. Argomento che si vuole brevemente toccare in questo paragrafo introduttivo per comprendere un po’ meglio la parabola di vita, non molto ampia, dei modelli plastici nati nell’Ottocento.

La prima delle due “visioni” è caratterizzata dall’alto grado di considerazione goduto dal punto di vista “intuitivo”, emblematicamente espresso dall’affermazione di William Thomson (1824-1907), ben noto col titolo di Lord Kelvin, pronunciata nel pieno del clima positivista e meccanicista:

> Io non sono soddisfatto finché non ho potuto costruire un modello meccanico dell’oggetto che studio. Se posso costruire un tale modello, comprendo; altrimenti, non comprendo affatto.[8]

E, sotto questo punto di vista, volendo anche citare un caso concreto –scelto tra i tanti disponibili– molto significativo e più strettamente attinente alla matematica, si può ricordare che

[8] “I am never content until I have constructed a mechanical model of the subject I am studying. If I succeed in making one, I understand; otherwise, I do not”, in W. Thomson, *Molecular dynamics and the wave theory of light: notes of lectures delivered at the Johns Hopkins University, Baltimore, by Sir William Thomson, ... stenographically reported by A.S. Hathaway*, Baltimore (Maryland – U.S.A.), Johns Hopkins University, *circa* 1884.

l'intenzione di dare risalto al contresempio, esibito da Peano (la cui fama è, come noto, particolarmente legata a questa forma di indagine scientifica), col quale il matematico torinese smentiva la validità generale del criterio di accertamento ("condizione sufficiente") fornito da Serret (nel suo *Cours de calcul différentiel et intégral*[9]) per la ricerca dei punti di massimo e minimo, condusse gli studiosi a

[9] La prima edizione del *Cours* di Joseph-Alfred Serret, in due tomi, è del 1868 (Paris, Gauthier-Villars). Qui si cita dalla terza ediz. del 1886 (stessi luoghi editoriali), p. 219 del t. I. Serret, al pf. intitolato *Des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes*, parte col dire: "Soit $f(x,y,z, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x,y,z, … On dit que cette fonction a une valeur maxima pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, …, lorsque la différence $f(x_0 + h, y_0 +k, z_0 + l, ...) - f(x_0, y_0, z_0, ...)$ est négative pour toutes les valeurs des accroissements h, k, l, … comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, la quantité positive ε étant d'ailleurs aussi petite que l'on le voudra. Si, au contraire, la précédente différence est constamment positive pour les même valeurs de h, k, l, …, la fonction $f(x,y,z, ...)$ prend une valeur minima pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, …"; e arriva alla conclusione che "les valeurs de x, y, z, … qui réspondent à un maximum ou à un minimum de la fonction $f(x,y,z,$ …) sont comprise parmi celles qui annulent la differéntielle totale df de cette fonction ou qui la rendent discontinue." A questo punto Serret scrive: "On arrive au même résultat par l'emploi de la formule de Taylor. […]". E così, nel proseguire, con l'impiego della formula di Taylor, le sue considerazioni, Serret giunge ad affermare che "le maximum ou le minimum a lieu si, pour les valeurs de h, k, l, … qui annulent $d^2 f$ et $d^3 f$, $d^4 f$ a constamment le signe – ou constamment le signe +". È su questa affermazione, secondo cui i punti di massimo e minimo (relativi) di una funzione (reale) di più variabili (reali) –che abbia, per un punto di R^n, per cui è definita, i differenziali di ordine superiore– sono dati da quei valori di $h, k, ...,$ che annullano contemporaneamente d^2f e d^3f e nei quali d^4f è, rispettivamente, minore o maggiore di zero, che si appunta la critica di Peano, espressa nell'*Annotazione N. 133-136* (da lui redatta, così come tutte le altre raccolte ad inizio volume) posta nel testo scritto a nome di Angelo Genocchi, suo maestro e titolare della cattedra di Calcolo infinitesimale, dal titolo *Calcolo differenziale e Principii di Calcolo integrale. Pubblicato con aggiunte dal D.*[r] *Giuseppe Peano* (Torino, Fratelli Bocca, 1884): un trattato che rispecchiava il corso universitario di Genocchi e le aggiunte, notevoli, di Peano.

realizzare, addirittura, un modello plastico (verrà etichettato l'*Esempio di Peano* o la *Superficie di Peano* o ancora, in Germania dove verrà realizzato, *Fläche von Peano*) del contresempio stesso: vale a dire della funzione $f(x,y)=(y^2 - 2px)(y^2 - 2qx)$, *ove* $p>q>0$.[10]

[10] Peano, infatti, nell'*Annotazione* citata osserva: "Non è esatto il criterio enunciato dal Serret, *Calcul*, p. 219: «le maximum ou le minimum *a lieu* si, pour les valeurs de *h*,*k*, … qui annulent $d^2 f$ *et* $d^3 f$, $d^4 f$ *a constamment le signe – ou constamment le signe +*».

Per vedere l'inesattezza di questa proposizione, si consideri p.e. la funzione intera

$$f(x,y)=(y^2 - 2px)(y^2 - 2qx),\ \text{ove } p>q>0,$$

e fatto $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, si avrà

$$f(h,k)=4pqh^2 - 2(p+q)hk^2 + k^4.$$

Il sistema dei termini a secondo grado è positivo per tutti i valori di h e k, tolto il valore di $h=0$, per cui si annullano i termini a terzo grado, e il sistema dei termini a quarto grado è positivo. Quindi, secondo il criterio di Serret, $f(x,y)$ è minima per $x=0$. Ma è facile assicurarci che questo non è. Pongasi invero $y^2 = 2lx$; facendo tendere x a zero anche y tende a zero, e si avrà

$$f\left(x,\sqrt{2lx}\right)=4\cdot(l-p)(l-q)\cdot x^2.$$

Questa quantità è a nostro arbitrio positiva o negativa, secondoché l è fuori, o dentro all'intervallo (p,q); quindi la funzione f assume in ogni intorno dei valori (0,0) di x e di y valori positivi e valori negativi, ossia valori maggiori e minori di $f(0,0)=0$, e f non è né massima né minima.

Lo stesso errore è commesso dal BERTRAND, *Calcul*, ecc., p. 504; TODHUNTER, *Calcolo*, N. 229, ecc.".

Il modello della *Superficie di Peano* (o *Fläche von Peano*, compresa nella *Serie XLIX, al n° 1*, dei modelli editi da Martin Schilling) è fatto considerando una funzione diversa ma dello stesso tipo, vale a dire la $z=f(x,y)=(2x^2 - y)(y - x^2)$, anzi, più esattamente, com'è scritto sull'etichetta incollata al modello, è considerata la funzione $200z=(x^2 - 10y)(2y - x^2)$ (con (0,0) punto di sella) per rendere meglio evidenti le caratteristiche della superficie stessa. Si fa notare che, contrariamente a quanto è affermato in Gerd Fischer, alla p. 71, vol. I (*Commentary*), dell'opera, citata, essa non è compresa nell'edizione del *Catalog* di M. Schilling, anno 1911 (che è composto di 40 serie più una serie iniziale non numerata), né è stato possibile trovare qualche edizione successiva del *Catalog* (che forse non è stata mai stampata) per controllare se la singola superficie o, ragionevolmente, tutta la *Serie XLIX*, fosse stata poi inserita.

La seconda, successiva, “visione”, molto diversa dalla precedente, è caratterizzata invece dalla sfiducia verso l’uso della comune intuizione sensibile nell’ “accertamento” (o “scoperta”) e, all’occorrenza, nell’ “invenzione” delle strutture matematiche. “Accertamento” e “invenzione” fatti allo scopo, rispettivamente, di “unificare” teorie matematiche diverse o usare i “teoremi di struttura” (delle teorie unificate) per saggiare la strutturazione di ulteriori, nuove teorie in fase di ideazione, oppure di precedenti teorie. Questo modo di fare matematica –sia detto per inciso– fu impiegato, nell’attuazione del programma di radicale riforma (o, si potrebbe dire, per usare termini consoni a questo discorso, di “ristrutturazione”) dell’insegnamento della matematica, basato sulle cosiddette “mathématiques modernes”, avvenuto, per limitarsi all’Europa, specialmente in Francia e in Belgio, negli anni Sessanta del secolo trascorso. Programma di riforma attuato con molto rigore, anche a livello di scuola primaria, per cui proprio ciò che, del programma bourbakista, più poteva giovare a un raffinato ricercatore (linguaggio, modo di definire, forma di esposizione, argomenti di studio) si poteva rivelare invece svantaggioso per studenti in tenera o giovane età, dotati di varie propensioni attitudinali e miranti a varie prospettive professionali; studenti interessati, in linea generale, a stabilire un accettabile rapporto con la matematica[11] anche attraverso le

---

Intorno ai due volumi curati da Fischer, corre l’obbligo di avvertire che il vol. II, costituente il *Catalogo fotografico*, contiene 132 foto di modelli (in alcuni casi è ripreso, con inquadratura diversa, lo stesso oggetto). I modelli fotografati rappresentano campioni che provengono quasi tutti dai Dipartimenti di Matematica delle università tedesche, in maggioranza da Göttingen ma anche da Erlangen, Heidelberg, München, e dal Palais de la Découverte di Parigi. Naturalmente, le foto ivi raccolte non riprendono tutti i modelli presenti nel *Catalog* di M. Schilling del 1911; mancano, per esempio, i modelli delle *superfici dei centri di curvatura*, quelli di un’intera serie di *superfici sviluppabili*, i modelli della *fisica-matematica* (diffusione del calore, superfici d’onda, ecc.).

[11] In questo senso, il più vecchio dei due redattori del presente scritto ricorda un fenomeno curioso che si verificò per alcuni anni accademici –primi anni Sessanta del Novecento– all’Università di Napoli. Bisogna sapere che scomparso Renato Caccioppoli (1904-1959) gli succeddette, alla cattedra di

multiformi strade dell' "intuizione" così come, al limite estremo, tante donne (e anche uomini), specialmente del Sud d'Italia, cui, fino agli anni Cinquanta del secolo passato, non veniva data la possibilità neanche di iniziare a frequentare la scuola primaria, si trasmettevano un modo elementare di fare i calcoli oralmente (erano chiamati "i conti alla femminile"), fondato su sottrazioni e addizioni ripetute, continuate divisioni o moltiplicazioni per due, una vaga idea della teoria dei rapporti e proporzioni – questo per i più "raffinati"–, bilanciamenti, e così via.

Visto dalla parte dei giovanissimi studenti, con l'introduzione spinta del programma bourbakista quasi tutti persero pure la possibilità di ricevere il tradizionale aiuto da parte dei propri genitori, ormai disorientati.

Il passaggio tra le due "visioni", rapidamente ricordate, non fu, in Italia, così improvviso e radicale. Anzi, quando si vadano a scorrere – per considerare un caso, curioso e notevole, che testimonia la compresenza, almeno nella penisola italiana, di vari punti di vista– gli *Atti della Società Italiana di Matematiche "Mathesis". Relazione del Congresso di Napoli, 13-16 Ottobre 1921*,[12] dove vennero verbalizzati gli interventi dei relatori, saltano agli occhi due "discorsi" molto diversi. Vi è quello d'apertura, tenuto nella mattinata della giornata inaugurale, da Federigo Enriques. E in base all'ampio resoconto che ne dà l'estensore del verbale si viene a sapere:

Analisi matematica, Federico Cafiero (1914-1980) mentre l'altra cattedra di Analisi era tenuta, già dagli anni precedenti, da Carlo Miranda (1912-1982). Analisi I e II erano, allora, insegnamenti comuni agli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Fisica e, anche, a quelli del Biennio in Ingegneria. Ad anni alterni, ciascuno dei due professori partiva col primo anno, svolgendo esclusivamente il corso di Analisi I, per tutti gli studenti dei tre corsi di laurea, e completava poi il ciclo, al secondo anno, insegnando, ancora per tutti, Analisi II. Il fenomeno curioso consisteva nel fatto che alcuni studenti preferivano rimandare di un anno l'iscrizione ad Ingegneria pur di non iniziare il ciclo col professore Cafiero il cui stile, molto aderente all'impostazione insiemistica e bourbakista, procurava loro, per ciò stesso, difficoltà nell'apprendimento.

[12] «Periodico di Matematiche», (IV), II, 1922, p.90 e segg.

> L'oratore comincia a tratteggiare la natura del matematico in cui il pubblico vede di solito uno sviluppatore di formule e un calcolatore di macchine, e che piuttosto deve essere ravvicinato al poeta e al filosofo; e si ferma a mettere in luce il rapporto storico di parentela e di interdipendenza che appare fra le matematiche e la filosofia nello sviluppo del pensiero europeo.

Dagli stessi *Atti* emerge pure che nel medesimo giorno –di pomeriggio però– Roberto Marcolongo (1862-1943), che era riuscito ad allestire, all'Università di Napoli, un *Istituto di Meccanica razionale* tra i primi in Europa per la dotazione di libri, modelli e strumenti matematici,[13] teneva una relazione, *Sul materiale didattico d'insegnamento*,[14] d'ispirazione molto diversa da quella di Enriques. Nel resoconto è infatti riportato:

> Il prof. Marcolongo comincia anzitutto collo sfatare la leggenda che, pel loro insegnamento, i matematici non abbiano bisogno che della lavagna e del gesso. Insiste invece sulla necessità che in ogni scuola, di qualsiasi grado, accanto al gabinetto di fisica, di chimica, di scienze naturali, ecc., vi debba essere quello di matematica. Anche il professore di matematica deve fare, in varia misura e in varie maniere, delle vere e proprie esperienze; deve avere a propria disposizione e valersene costantemente nell'insegnamento, libri, disegni, modelli, macchine, tavole matematiche, in modo da agevolare lo studio della matematica e renderlo più attraente e più utile. […] Perciò il Marcolongo fa una lunga e minuta descrizione di tutto quanto l'industria più raffinata, la meccanica di alta precisione e l'ingegno di abili costruttori, ha saputo produrre pei modelli matematici e per gli strumenti.

E, nell'insieme dei modelli consigliati, Marcolongo poneva pure gli *anaglifi geometrici* messi a punto da Henri Vuibert, la cui tecnica di realizzazione fu da questi descritta nell'opuscolo avente per titolo *Les Anaglyphes géométriques*, pubblicato nel 1912.[15] Gli *anaglifi* –che permettevano di formare una sorta di modelli molto meno "materiali"– facevano acquistare alle figure geometriche, disegnate sul

---

[13] Si veda R. Marcolongo, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, Stabilimento Industrie Editoriali Meridionali, 1935, p. 27 e segg.

[14] Come annunciato negli *Atti*, il testo completo della relazione di Marcolongo, dal titolo modificato in *Materiale didattico ed esperienze nell'insegnamento*, fu riportato nel «Giornale di Matematiche», LX (13° della 3ª serie), 1922.

[15] Paris, Librairie Vuibert, Boulevard Saint Germain, 63, 32 pp.

piano di un foglio da disegno, un loro rilievo, vale a dire che le figure si trasformavano in oggetti (virtuali) i quali sembravano staccarsi dal foglio ed elevarsi in tre dimensioni (*effetto rilievo*). Una tecnica che permette di vedere anche gli elementi interni di una figura solida e le linee di costruzione della stessa e che può essere considerata come una delle prime che abbiano contribuito al sorgere, al tempo moderno, della *Realtà Virtuale* (*Virtual Reality*, *VR*), oggi fiorente settore di applicazione dell'informatica.[16] In questi anni, poi, grazie ai calcolatori, a software matematici, alla computer grafica, è indiscussa l'importanza che, nelle scienze matematiche e nel settore della geometria, assumono immagini e realtà virtuale quali strumenti per la didattica e per la ricerca (oggi vi è un rapporto più equilibrato tra "formule" e "figure"); in particolare, si assiste ad un ritrovato interesse, di estensione internazionale, verso quei tipi di modelli e strumenti a cui aveva pure accennato Marcolongo, compreso il semplice blocco di fogli di carta quadrettata (*3D drawing pad*), a linee rosse e verdi, dove si può tracciare, magari con una penna con l'inchiostro di colore nero, una figura su di un foglio e poi osservarla in rilievo mediante gli annessi occhialini (*anaglittoscopi*) aventi i due "vetri" (che in realtà possono essere fatti anche di carta trasparente) colorati, rispettivamente, in rosso e verde.

[16] La visione stereografica e gli anaglifi sono molto utilizzati oggi in un'ampia varietà di applicazioni concernenti geometria, strutturistica chimica, architettura, cinema, realtà virtuale, conservazione dei beni culturali (in quest'ultimo campo, recente è, per esempio, la realizzazione, presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Salerno, di un filmato in cui, attraverso la tecnica di visualizzazione stereoscopica, lo spettatore diventa visitatore condotto a girare per il sito virtuale –la sua origine reale risale all'età romana, al tempo dell'eruzione del Vesuvio del 79 d.C.– di Moregine presso Pompei). Al riguardo si può vedere N. Palladino, *Gli Anaglifi di Vuibert. Origine storica e applicazioni in didattica basata sui modelli di superfici matematiche* (Preprint n. 19 – 2008. Dipartimento di Matematica e Informatica – Università degli Studi di Salerno), in corso di pubblicazione per il *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* di Napoli; l'ultima parte dell'articolo, § 5, è dedicato alla *Generazione degli anaglifi nella realtà virtuale*.

Lo scopo di questo articolo, si è detto, è quello di fornire aggiornata documentazione della vicenda storica (e, inoltre, offrire delle riflessioni interpretative) dei modelli matematici plastici, costruiti in Europa, venutasi a sviluppare intensamente per poco più di mezzo secolo, tra il 1870, circa, e il 1930, anno, quest'ultimo, in cui la produzione subì un blocco pressoché totale anche per gli sconvolgimenti dovuti alla Prima Guerra Mondiale e per la mancanza di commesse conseguente alla depressione economica scoppiata nel 1929.[17]

Prima di pervenire alla seconda parte dell'articolo, dove l'attenzione verrà orientata sui "fondi" di modelli matematici che si trovano presso le "antiche" sedi universitarie italiane –delle quali si darà un elenco–, informazioni e approfondimenti saranno forniti sulle iniziative più importanti che si ebbero in Europa: Francia (essenzialmente Parigi), Regno Unito (principalmente Londra e Manchester), Germania (gli Istituti di Matematica dei Politecnici di Monaco di Baviera, Darmstadt, Karlsruhe e poi l'Università di Gottinga). Luoghi dove ebbero origine, con slanci di varia potenza e con uno sviluppo di maggiore o minore estensione, l'ideazione e la realizzazione dei modelli matematici e dai quali proviene pressappoco la totalità degli esemplari oggi conservati nei fondi museali delle "antiche" università italiane. (Quasi tutti i posti d'Europa ora menzionati sono stati raggiunti dagli autori del presente articolo, recentemente essi hanno visitato anche il nucleo di modelli oggi

[17] Vi è un brano di lettera, del 1932, indirizzata da Martin Schilling all'Istituto di Matematica dell'Università di Gottinga (riportato in Gerd Fischer, *Mathematical Models/Mathematische Modelle*, cit., II –*Catalogo fotografico*–, pp. IX-X), in cui s'informa che nell'ultimo anno non era stato prodotto alcun modello, che il primo modello costruito dopo la fine della guerra era stato la *Superficie di Peano*, che vi erano nuovi modelli progettati, ma che in conseguenza delle cattive condizioni del mercato la produzione dei modelli era stata sospesa: "[…] dass in den letzten Jahren keine neuen Modelle erschienen sind. Das erste nach dem Kriege ist das Modell der Peano-Fläche. Es sind verschiedene neue Modelle in Vorbereitung, die wir aber infolge der schlechten und unübersichtlichen Geschäftslage immer wieder zurückgestellt haben".

presente al *Mathematisches Institut* della *Ruprecht-Karl-Universität* di Heidelberg).

Va subito precisato che, purtroppo, in Italia non si riuscì a destinare uno spazio istituzionale a favore di questa attività. Ciò accadde nonostante la richiesta effettuata, nel 1883, da Giuseppe Veronese (1854-1917), professore di Geometria analitica all'Università di Padova, di allestire un laboratorio nazionale ("Un *Atelier* come quello di Monaco", egli scrive). Veronese ebbe, allo scopo, contatti diretti col Ministro *pro tempore* della Pubblica Istruzione, il medico Guido Baccelli (1832-1916), e fu sostenuto da illustri professori quali erano Brioschi, D'Ovidio, de Paolis, Dini e Bertini. Sull'episodio si ritornerà più avanti nel corso dell'articolo.

Vi furono invece delle iniziative locali che produssero anche qualche modello significativo e di buona fattura, tuttavia si trattava di realizzazioni isolate, eseguite da singoli studiosi (un esempio è la *Cuffia di Beltrami*[18] per le geometrie non euclidee) o da studenti su indicazione dei loro professori, e destinate all' "uso interno".

Forse, in ambito italiano, si può ritenere un'eccezione, sia perché dotata di una sua propria organicità e sia per la finissima fattura, la piccola raccolta sviluppata da Alfonso Del Re (1859-1921) all'Università di Napoli nell'ambito del *Gabinetto* di Geometria descrittiva annesso alla corrispondente cattedra di cui egli era titolare.[19] (Nella *Raccolta Del Re* i telai –chiamati, in generale, anche

---

[18] Cfr. A.C. Capélo, M. Ferrari, *La «cuffia» di Beltrami: storia e descrizione*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», II, 1982, pp. 233-247. Nell'articolo gli autori fanno notare che "[…] per quanto riguarda la superficie pseudo sferica di tipo ellittico non è possibile ripiegare il modello in questo modo senza effettuare un taglio".

[19] Ne dà notizia lo stesso Del Re nell'opuscolo *Programma del corso e programma di esame per l'anno scolastico 1906-1907* dove è presentato in appendice l'*Elenco dei Modelli geometrici eseguiti dagli allievi della Scuola di Geometria descrittiva dell'Università di Napoli dal 1901 al 1906*. Sono 36 modelli, dei quali 31 in legno e filo, 3 in legno e ottone, 2 in legno, ottone e crine di cavallo. L'opuscolo riporta ancora altri due elenchi; il primo riguarda 13 *Modelli acquistati* [nel 1901-1902] *dal Prof. A. Del Re e donati alla Scuola di Geometria Descrittiva*, il secondo i *Modelli acquistati* [nel 1905] *dal Prof. A. Del Re sui fondi assegnati alla Scuola di geometria*

"castelli"– che tenevano i fili, in fibra naturale, delle superficie rigate rappresentate, erano in legno lavorato artisticamente con la tecnica del traforo[20]).

Solo molto più tardi, con gli anni Cinquanta del secolo scorso, Luigi Campedelli (1903-1978) –professore all'Università di Firenze–, in seguito ad un deliberato dell'Assemblea generale dei soci dell'*UMI – Unione Matematica Italiana* (svoltasi a Taormina, nel 1951) produsse una serie fatta di un numero molto limitato (cinquanta) di modelli,[21] dei quali quarantatre in gesso, ottenuti "ricalcandoli" (in ciò

---

descrittiva: sono tre intere serie del *Catalog* di M. Schilling, e cioè la serie XI (fatta di 8 modelli in filo metallico raffiguranti la relazione tra le singolarità di una curva dello spazio e le singolarità delle proiezioni della medesima curva su tre piani ortogonali tra loro *–Acht Draht-Modelle über die Rückkehrelemente der Projectionen einer unebenen Curve von denen der Curve selbst–*), la XIII (formata da 10 modelli in fili di fibra naturale di superfici rigate del quarto ordine *–Zehn Faden-Modelle der Regelflächen 4. Ordnung–*) e la XXVIII, qui già citata in nt. 2 (sono sei modelli in fil di ferro di curve cubiche dello spazio considerate per il loro impiego in ottica fisiologica, l'ultimo dei quali è l'*Horopter* di cui si è detto). Nell'*Annuario degli Istituti scientifici italiani*, diretto da S. Pivano, Bologna/Roma, N. Zanichelli/Athenaeum, vol. II, 1920, p. 378, a proposito del "Gabinetto di geometria descrittiva e Scuola di disegno" diretto da A. Del Re, è annotato: "Fondato nel 1901 dall'attuale direttore [A. Del Re]. È ricco di modelli geometrici, eseguiti dagli allievi, od acquistati, e di apparecchi per fotogrammetria, per proiezioni, per disegno, ecc.".

[20] Uno di questi modelli (l'unico sopravvissuto), rappresentante una superficie rigata, del quarto ordine, limitata da due coniche (rispettivamente un'ellisse e un'iperbole con i suoi due rami) è riprodotto fotograficamente e riportato alla tav. 13 inserita nell'articolo di F. Palladino, *Antichi strumenti e modelli matematici conservati a Napoli e a Pisa*, «Physis», vol. XXIX (1992) Nuova Serie, pp. 833-847.

[21] Essi furono classificati da Campedelli in base ai gruppi (tra parentesi tonda è indicato il numero di pezzi per ciascun gruppo): A) *Quadriche* (5); B) *Curve gobbe del terzo ordine tracciate su cilindri quadrici* (4 + 1); C) *Superfici cubiche non rigate* (19); D) *Superfici rigate gobbe del terzo ordine* (4); E) *Superfici del quarto ordine* (6); F) *Superficie dell'ottavo ordine* (1); G) *Superfici pseudo sferiche* (3); *Superfici rigate*: *Paraboloide iperbolico* (con il doppio sistema delle generatrici), *Iperboloide a una falda* (con il

avvalendosi dell'opera di artigiani fiorentini) dagli originali, realizzati in Germania nell'Ottocento, che l'Università di Pavia aveva acquistati, per la maggior parte, dall'editore Ludwig Brill, e che aveva avuto la fortuna e la capacità di conservare (a tutt'oggi essi sono ancora a Pavia).[22] A questi modelli in gesso egli ne aggiunse altri sette in filo di fibra sintetica (filo di *nylon* di diversi colori fornito gratuitamente dalla *Rhodiatoce* di Milano) con il "castello" in ottone.

Prima di chiudere con il suo impegno, Campedelli riprodusse, molto probabilmente, ancora qualche ulteriore modello di superficie rigata, per esempio la "Superficie di uguale pendenza" (si è trovata all'Università di Padova[23]), di cui si verrà più oltre a parlare in occasione delle *Collections Muret*.

Per quanto nei *Bollettini-UMI* non sia data notizia delle fonti ispiratrici utilizzate da Campedelli, si è potuto sapere che i modelli originali, da cui egli partì per riprodurre le nuove copie in gesso, furono, come si è accennato, quelli provenienti dall'Università di Pavia grazie alla dichiarazione fatta, alcuni anni fa –1992[24]–, a Franco Palladino dalla dott. Cesarina Dolfi (preside in pensione, negli anni Cinquanta collaboratrice di Campedelli); mentre si è potuto poi accertare che per i modelli realizzati in filo di nylon (compresa a quanto sembra la "Superficie di uguale pendenza") egli si ispirò al catalogo –una copia del quale si è ritrovata presso il Dipartimento di

---

doppio sistema delle generatrici e il cono asintotico); Cinque tipi di *Elicoidi* (si veda «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana – *BUMI*», (III), VII (1952), pp. 221-222, 362, 465-467; e *BUMI*, (III), VIII (1953), p. 229; *BUMI*, (III), X (1955), p. 300; *BUMI*, (III), XI (1956), p. 302).

[22] Cfr. *Uno specimen dei giacimenti italiani di modelli e strumenti matematici: Il Nachlass dell'Università di Pavia*, volumetto di 60 pagine pubblicato per le <<Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere>>, Milano, 1997, pp. 315-374

[23] Cfr. F. Palladino, *Il Fondo di Strumenti e Modelli matematici antichi dell'Università di Padova e l'iniziativa di Giuseppe Veronese per un Laboratorio Nazionale Italiano*, Università di Padova – Dipartimento di Matematica pura ed applicata, Padova, 1999, pp. 55-56.

[24] Al tempo dell'uscita del *Dossier didattica: Dagli strumenti ai modelli*, inserito in *Lettera PRISTEM*, Milano, Università Commerciale "L. Bocconi", 6, Novembre 1992.

Matematica "U. Dini" dell'Università di Firenze– dal titolo *Lehrmodelle für Mathematik* curato dalla ditta *Rudolf Stoll KG* (indirizzo: Berlin NO 18, Oderbuchstrasse 8-14, *Deutsche Demokratische Republik* –ovvero Repubblica Democratica Tedesca, o Germania Est come allora pure si diceva–, stato socialista esistito, si ricorderà, fino alla riunificazione germanica avvenuta nel 1990) che, a partire dagli anni Cinquanta del XX secolo, cominciò a raccogliere e vendere i modelli matematici prodotti nel "II mathematischen Institut der Humboldt-Universität" di Berlino (Est) sotto la guida del direttore dell'*Institut*, Kurt Schröder (1909-1978). Gli oggetti del *Catalogo Stoll* sono descritti in tre lingue, tedesco, inglese e francese; per esempio la "Superficie di uguale pendenza" (*Böschungsfläche*, in tedesco, *Sloping surface*, in inglese, *Surface d'égale pente*, in francese) avente per curva direttrice un'ellisse è catalogato al posto 401/93.

La serie di *Modelli Campedelli*, replicata per un certo numero di copie, fu venduta a quelle sedi universitarie (Messina, Bari, Catania, Milano-Università statale, per citarne alcune) che ne fecero richiesta; ovviamente una copia completa si trova pure all'Università di Firenze che era sprovvista di modelli ottocenteschi essendo una "giovane" sede universitaria (diversamente da Pisa –"antica" università della Toscana–, dove vi era una copiosa collezione, ora perduta). Per poter gestire questa iniziativa fu attivata una "Sezione Modelli" dell'*UMI.*

2. Alcuni modelli, progenitori di quelli menzionati, al modo di esempi, al precedente pf. **1**, cominciarono ad essere costruiti in Europa (a quel tempo il continente europeo, per quanto formato da nazioni frequentemente "l'una contro l'altra armata" aveva, considerato nel suo insieme, l'assoluto primato mondiale sotto i profili politico, economico, scientifico, industriale, militare), in rapporto alle esigenze della Geometria descrittiva e, successivamente, proiettiva. L'inizio è databile addirittura alla prima metà dell'Ottocento, quando in Francia (principalmente a Parigi) vennero alla luce le prime collezioni di modelli.

Superata la prima metà del secolo XIX, si assiste poi, accanto all'accrescersi della produzione francese che coinvolgeva vari campi delle scienze matematiche (con predilezione verso una tipologia che si potrebbe dire da *École Polytechnique*), alla forte attenzione che, presso vari centri culturali del Regno Unito di Gran Bretagna e Irlanda, veniva prestata ai modelli matematici (per quanto, in questo Regno, la produzione era piuttosto orientata verso la realizzazione di strumenti, tecnologicamente raffinati, ad uso delle scienze matematiche).

Pochi anni dopo l'unificazione della Germania (avvenuta nel 1871 con la formazione del *Deutsches Reich*) l'iniziativa consistente nella realizzazione dei modelli matematici assume un grande rilievo scientifico, istituzionale e didattico raggiungendo una propria ben delineata autonomia. Viene organizzata e ulteriormente incentivata la produzione degli istituti matematici, fisici, tecnico-meccanici e geodetici esistenti presso le università e i politecnici germanici e, quindi, una ditta (una casa editrice: quella di Ludwig Brill, appositamente fondata a Darmstadt nel 1877 su stimolo di Felix Klein –1849-1925– e Alexander Brill –1842-1935–,[25] poi continuata, dal 1899, ad opera di Martin Schilling nella città di Halle an der Saale, in un primo momento, e a Lipsia successivamente) viene a fungere da centro di raccolta (dove però si provvede a dare, in certi casi, un' "ultima mano" alla preparazione dei modelli costruiti in gesso) con un catalogo unico suddiviso per serie formate quasi sempre da modelli riconducibili al medesimo tema scientifico, ideati e, spesso, costruiti presso una data sede sotto la guida di un dato professore. Catalogo che non si presentava come semplice elencazione di pezzi ma, arricchito com'era da puntuali esposizioni dell'argomento coinvolto e dai rimandi ai saggi scientifici ispiratori, rappresentava, nelle sue varie edizioni, la *summa* descrittiva del "sistema dei modelli plastici" che fiorì in Germania per circa quarant'anni.[26] La distribuzione dei

[25] Alexander e Ludwig Brill erano fratelli.

[26] Il nome dato al catalogo, che si è già avuto modo di menzionare, era: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. Esso era diviso in due parti. Nella prima, i modelli erano ordinati per serie (nell'edizione, notevolmente accresciuta, del 1911 le serie erano 40

più una iniziale non numerata); nella seconda parte, i modelli erano omogeneamente raggruppati tenendo conto del loro legame scientifico. Così, per esempio, nella sezione XI, il cui titolo è *Functionentheorie*, della seconda parte del *Catalog*, vengono, tra gli altri, compresi tre *Modelle Riemann'sche Flächen* (modelli di superfici di Riemann, realizzati in gesso), appartenenti alla serie XVII, presentata nella prima parte del catalogo; assieme a *16 Modelle zur Darstellung von Functionen einer complexen Veränderlichen* (pure realizzati in gesso; tra questi sedici vi è, per esempio, il modello rappresentante, insieme, la parte reale e la parte immaginaria – *Real und Imaginärteil*– di

$w = \sqrt{z^2 - 1}$, dove $w=u+iv$ e $z=x+iy,$

e, ancora, analogamente, quello riguardante la funzione:

$$w=\frac{2}{\pi}\log\frac{z+\frac{\pi}{4}}{z-\frac{\pi}{4}}$$

appartenenti alla serie XIV, della parte prima del catalogo, e così via).

Sulle edizioni del *Catalog* si rimanda a F. Palladino, *Uno specimen dei giacimenti italiani di modelli e strumenti matematici: Il Nachlass dell'Università di Pavia*, cit., e a F. Palladino, *Il Fondo di Strumenti e Modelli matematici antichi dell'Università di Padova*, cit., ivi note 5 e 6. Al riguardo, si vuole comunque ricordare ora qualche dato di particolare importanza. Delle edizioni del *Catalog* le notevoli e più diffuse sono quelle del 1903 (è la sesta edizione, conta 29 serie di modelli più una serie iniziale, o serie zero, non numerata, di modelli costruiti in cartone) e quella del 1911 (è la settima edizione: conta quaranta serie più quella iniziale che è uguale a quella del 1903), tutte e due allestite da Martin Schilling. Del *Catalog*, curato da L. Brill, non si è trovata alcuna copia a stampa in tutti i luoghi d'Italia e d'Europa che si è avuto modo finora di visitare né, a quanto sembra, altri studiosi hanno comunicato di averlo visto fino ad oggi. Vi è però un'esplicita menzione della sua esistenza nell'antico *Inventario* dei modelli di Pavia (in F. Palladino, *Uno specimen*, cit., p. 320, nt.10, dove è riportata la seguente specificazione: "Il catalogo cui si riferiscono i numeri segnati dopo il nome di ciascun modello è il Catalog math. Modelle von Brill, 1885, 2ª parte, da pag. 27 a 48"). Una generica menzione concernente un'*edizione Brill* del 1882 è fatta pure in Gerd Fischer, *Mathematical Models/Mathematische Modelle*, cit., II, p. V, dove si accenna a un *Catalog der Modellsammlung des Mathematischen Instituts der kgl. Technischen* modelli (specialmente di quelli in gesso, i quali erano sicuramente superiori, non solo per le teorie matematiche di cui erano interpreti, ma pure per la qualità del materiale e della fattura, ai consimili delle altre ditte straniere, in prima linea francesi), si irradia per la Germania, successivamente per l'Europa (con varia intensità dalla Spagna e dal Portogallo alla Russia, dalla Svezia all'Italia) spingendo nell'ombra, tra l'altro, le precedenti, diverse, realizzazioni.

Verso la fine dell'Ottocento, i modelli editi da Martin Schilling massicciamente si diffondono anche negli Stati Uniti d'America dove

---

Hochschule München, aufgestellt im Januar 1882 unter Leitung von Prof. A. Brill. A questo punto, bisogna sottolineare, che le serie di modelli, via via che venivano prodotte, erano accompagnate dall'edizione separata di veri e propri saggi illustrativi riguardanti il *back ground* costituito dalle conoscenze matematiche da cui si era tratto ispirazione. È da ritenersi un piccolo colpo di fortuna l'aver comunque ritrovato, nel 1997, al Politecnico di Monaco di Baviera, dagli autori del presente articolo, la raccolta completa, assemblata nel volume dal titolo *Abhandlungen zu den durch die Verlagshandlung von L. Brill in Darmstadt veröffentlichten Modellen für den höheren mathematischen Unterricht*, dei saggi relativi alle prime ventuno serie edite da L. Brill. Il volume non reca la data di edizione ma sulla scheda bibliografica è scritto che fu approntato nel 1892 circa, a Darrmstadt. Sulla stessa scheda sono riportati i nomi (peraltro noti a ragione della loro attività con la quale ebbe inizio la realizzazione di modelli tra München e Darmstadt) di quelli che furono probabilmente i curatori della raccolta di saggi: *A. Brill*, *J. Bacharach*, *L. Schleiermacher*, *W. Dyck*, *K. Rohn*; inoltre, l'*ex libris* è costituito dal segno lasciato da un timbro e dal quale si legge: *K.[öniglisch] B.[ayerische] Techn. Hochschule in München – Mathem. Institut*. A questi saggi intende riferirsi Gerd Fischer quando scrive (si veda *Mathematical Models/Mathematische Modelle*, cit., II, p. IX): "Responding to «*instigation from Munich*» the publishing company L. Brill in Darmstadt took over the sales of models. They were put together in series, each being accompanied by mathematical explanation. Unfortunately it seems that the latter have been lost; at least they cannot be found at the institutes where the collections presently abide."

Un ulteriore, curioso, dato si vuole fornire. Accanto ai nomi di A. Brill, J. Bacharach, ecc., elencati, bisogna aggiungervi, tra i primi realizzatori di modelli, quello di Rudolf Diesel (1858-1913) inventore del motore a combustione interna che ancora oggi è conosciuto col suo nome.

il consolidarsi delle prime università della costa atlantica era accompagnato dal sorgere di numerose altre nella direzione degli stati che si incontravano andando verso l'interno e, successivamente, verso il lontano ovest.

Come si può immaginare, il fenomeno della ideazione e costruzione dei modelli matematici è una metafora della contestuale storia civile e politica, sia europea che, sostanzialmente, del "mondo occidentale", con l'affacciarsi o l'alternarsi, in posizione di primo piano, di diversi potenti stati nazionali.

Alcuni segnali che giungono dagli Stati Uniti d'America, tra la vigilia dello scoppio della Prima Guerra Mondiale e immediatamente dopo la conclusione della stessa, permettono di scandire significativamente la cronologia dell'ultimo segmento del percorso ora delineato e di accorgersi della discesa in campo, anche in questo settore, dell' "America".

Il primo segnale è rappresentato da una recensione, redatta da R.C. Archibald (1875-1955), professore di matematica alla Brown University di Providence –Rhode Island– il quale, dopo gli studi universitari compiuti negli U.S.A., aveva pure frequentato, come spesso accadeva nell'Ottocento ai giovani americani, le università tedesche. Archibald era stato a Berlino, nel 1898-'99, e a Strasburgo, nel 1900, dove aveva conseguito il grado di *Ph.D.* La recensione apparve nel *Bulletin of the American Mathematical Society* del 1914,[27] sotto il titolo di *Mathematical Models*, e in essa Archibald elencava, commentandoli, i quattro maggiori cataloghi del momento; e cioè:

Il *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht* di Martin Schilling, edizione 1911, che si è citato nelle note precedenti.

L'*Abhandlugen zur Sammlung mathematischer Modelle*, in zwanglosen Heften herausgegeben von Hermann Wiener, Leipzig, Verlag von B.G. Teubner. 1. Heft von H. Wiener, 1907; 2. Heft von P. Treutlein, 1911.

Il *Verzeichnis von H. Wieners und P. Treutleins Sammlung mathematischer Modelle für Hochschulen, höhere Lehranstalten und*

[27] Vol. 20 (1914), pp. 244-247.

technische Fachschulen. Zweite Ausgabe mit 6 Tafeln, Leipzig und Berlin, Verlag von B.G. Teubner, 1912.

L'*Illustrierter Spezialkatalog mathematischer Modelle und Apparate*, Entworfen von G. Koepp und anderen bewährten Fachmännern, New York City, Eimer and Amend.[28]

Si tratta del meglio della produzione specialistica internazionale –comprendente pure il settore della didattica elementare– che appartiene però tutta quanta alla Germania (sulle realizzazioni di Hermann Wiener e Josef Peter Treutlein –1845-1912– si ritornerà) dove si registra l'impegno, in questo settore, anche del grande e rinomato editore G.B. Teubner di Lipsia. Tuttavia è sintomatico che l'ultimo dei titoli elencati da Archibald pur essendo ancora in tedesco sia presentato da un editore americano: la "Eimer & Amend" è un'importante ditta produttrice di apparecchi, chimici e fisici, per i laboratori di ricerca e per l'industria, distribuiti e venduti con il supporto dei relativi cataloghi.

Il secondo, successivo, segnale è rappresentato dall'autonoma progettazione, all'Università dell'Illinois (nel Laboratorio di Matematica installato nell'ambito del Dipartimento di Matematica), avente sede nella città di Urbana, di modelli fatta su iniziativa di Arnold Emch (1871-1959), professore associato di Matematica. Emch ne dà dettagliata esposizione in tre numeri dell'*University of Illinois Bulletin* (che usciva con cadenza settimanale stampato dall'University of Illinois Press): il No. 12, vol. XVIII, del 22 Novembre 1920 (*Mathematical Models. I Series*); il No. 42, vol. XX, del 18 Giugno 1923 (*Mathematical Models. II Series*); il No. 35, vol. XXII, del 27

---

[28] Su questo catalogo non si è riuscito ad avere altre notizie. G Köpp compare invece numerose volte (pp. 243, 244, 245, 246, 257, 258) nel famoso *Katalog*, del 1892, curato da Walther Dyck in occasione dell'esposizione di Monaco di Baviera, per quanto riguarda l'ideazione di modelli per l'insegnamento elementare della Planimetria, Stereometria (compresi solidi stellati), Trigonometria, Geometria descrittiva e sezioni di quadriche, modelli eseguiti dall'Istituto per il materiale didattico "J. Ehrhardt & Co." di Bensheim (nel Land dell'Hessen –Assia–, in Germania).

Aprile 1925 (*Mathematical Models. III Series*).[29] Nell'introduzione alla prima serie Emch precisa che sono stati o verranno realizzati

[29] La prima serie presenta 18 "articoli" prodotti e messi in vendita. Le novità di maggiore interesse appaiono essere le *Cauchy Surfaces*, così definite: "If we consider a function of a complex variable $w=f(\xi)=u+iv$, and at every point (x,y) erect a perpendicular to the complex ξ-*plane* equal to the value of u^2+v^2 at each point, et denote this value by z, we obtain an equation $F(x,y,z)=0$ which defines a so called Cauchy surface. This surface is the locus of the endpoints of those perpendiculars." Vengono proposte due *Superficie di Cauchy*, rispettivamente di equazioni

$w=\dfrac{\xi-1}{\xi+1}$, che è una quintica, e $w=\xi^3-1$ che è una sestica.

Il diciottesimo "articolo" è un *Cinematographic film of Poncelet polygon* accompagnato dalla corrispondente didascalia: "Continuosly appearing movement of a triangle remaining inscribed and circuscribed to two fixed circles respectively." (Un "poligono di Poncelet" è un poligono di qualsiasi numero di lati che può essere contemporaneamente inscritto in una curva del second'ordine -una conica- e circoscritto ad un'altra dello stesso ordine. Al riguardo si può consultare la seguente pubblicazione, a carattere storico: *I Poligono di Poncelet*. Discorso pronunciato nell'Università di Genova da G. Loria in occasione del solenne accoglimento a Dottore aggregato della facoltà di Scienze, Torino, Stamperia reale della ditta G.B. Paravia e C., 1889).

La seconda serie è fatta di cinque "articoli" che vanno dalla *Peano surface* (espressa dalla quartica

$z=\lambda f(x,y)=(y^2-2px)(y^2-2qx)$: il modello è realizzato però ponendo $\lambda=-1/10$, $p=2{,}5$, $q=0{,}5$) a una curva, una *sestics of genus 4*, tracciata su di una sfera di vetro trasparente, ecc.

Della terza serie, composta di sei "articoli", il più curioso è sembrato essere proprio l'ultimo di essi: *Models of the symmetric substitution group of order 24 (G_{24})*. Dopo la breve presentazione dell'argomento: "The symmetric substitution group of n elements of order $n!$ may be represented geometrically in a projective space of n-1 dimensions and this lends to important properties of certain geometric forms. The author has recently considered some of these applications, principally with reference to the G_6 and G_{24}. The four elements, numbers, x_1, x_2, x_3, x_4 of the G_{24} are chosen as projective coordinates of a pointing 3-space", viene enunciato lo specifico teorema interpretato dal modello, che è realizzato in filo.

soltanto modelli che non sono disponibili mediante altri cataloghi e che "among the projects considered for future work are designs for stereoscopic and ordinary lantern slides, cinematographic films and charts of mathematical figures": disegni stereoscopici, proiettori di diapositive, filmati cinematografici, fanno pensare all'agilità, tipicamente americana, nell'utilizzare ampiamente tutte le forme di rappresentazione e comunicazione, comprese naturalmente quelli di recentissima concezione.

3. Dopo l'*excursus* fatto al paragrafo precedente, si vuole ora guardare più da vicino al fenomeno della ideazione e costruzione di modelli matematici nel "vecchio continente".

Per quanto riguarda la Francia, sono da segnalare la rilevante iniziativa, intrapresa negli anni Venti del XIX secolo, da Irmond Bardin –1794-1867– (socialista sansimoniano, egli aggiunse al proprio nome quello di *Libre* e pare che fosse conosciuto anche come Bardin de la Moselle), allievo, in Parigi, dell'*École Polytechnique* poi professore di Disegno e Fortificazioni presso la stessa scuola oltreché "libero docente" di un corso di Geometria descrittiva e di scienze applicata all'industria (sotto questo aspetto collaborò con Jean-Victor Poncelet –1788-1867–) per la costruzione di modelli destinati allo studio della Geometria descrittiva (rappresentanti "solidi compenetrati") e, all'incirca nello stesso tempo, l'iniziativa di Théodore Olivier (1793-1853), anch'egli allievo dell'*École Polytechnique* e poi professore di Geometria descrittiva al *Conservatoire National des Artes et Métiers* della capitale francese, che progettò una serie di modelli in filo di superfici rigate. La novità espressa dai modelli di Olivier consiste principalmente nel fatto che molti di essi erano a conformazione variabile, non fissa come quelle, dei modelli simili, creati in precedenza da Gaspard Monge (1746-1818) allorquando fu aperta in Francia l'*École Polytechnique*. Per esempio, nel caso dell'iperboloide a una falda si potevano ottenere, "storcendo" la configurazione, le posizioni limiti raffiguranti, rispettivamente, un cono o un cilindro, e nel caso di una curva dello spazio, ottenuta dall'intersezione di due superfici realizzate in fili, si potevano, mediante anellini colorati entro cui si facevano passare i fili nei "punti d'intersezione", evidenziare la curva stessa e i successivi profili che essa veniva ad assumere con lo slittamento degli anellini per effetto dello "storcimento" delle superfici generatrici.

Gli accorgimenti tecnici ora descritti furono fatti propri dagli autori che vennero dopo e che realizzarono pezzi analoghi conferiti al *Catalog Brill/Schilling* come attestano alcuni modelli presenti, per esempio, a Padova e Pavia.

Una copia della *Serie Olivier* (una quarantina di oggetti) fu donata da Olivier allo stesso *Conservatoire* e sono oggi esposti nella sezione *Musée des Arts et Métiers*.[30] Essi furono materialmente costruiti dalla ditta "Pixii Père et Fils, Constructeurs d'instruments de physique, France Paris" (che veniva ad essere l' "Auteur materiel"), come tenne a specificare la vedova di Olivier. La signora volle, infatti, al momento in cui vendeva, nel 1855, i circa 50 modelli (costituenti una seconda serie posseduta personalmente dal marito) a William M. Gillespie, che li portò negli Stati Uniti d'America, che a ciascuno pezzo fosse applicata, mediante una targhetta, questa annotazione completata dalla complementare sull' "Auteur intellectuel: Olivier Théodore, Professeur, France Paris". L'attività di Olivier fu proseguita da Fabre de Lagrange del quale si dirà nel dare uno sguardo alla realtà del Regno Unito.

Di ampia portata e molto conosciuta in Europa fu l'impresa, innestatasi su quella di Irmond Bardin, sviluppata da Charles Muret, ingegnere della città di Parigi (vincitore della medaglia d'oro all'*Esposizione mondiale di Anversa* del 1885 per un modello plastico del *Canale interoceanico di Panama*), autore di alcune *Collections* delle quali fu edito un *Catalogue* diffuso dall'editore parigino Charles Delagrave: in una lettera, inviata dalla capitale francese in data 18 Agosto 1871, dal Muret al matematico Eugène Catalan (1814-1894),

[30] Cfr. W.C. Stone, *The Olivier Models*, Schenectady (N.Y. - U.S.A.), Friends of the Union College Library, 1969 e web-site: *www.union.edu/Olivier*; inoltre l'articolo, siglato by W.M.G., dal titolo: *Catalogue of the Recent Additions to the Engineering Models of Union College, Schenectady*; e ancora il sito: *www.math.usma.edu/people/rickey/dms/OlivierModels-France.htm*

allora professore a Liegi (Catalan è oggi ricordato, in questo settore, per l'ideazione di una superficie minimale, di cui fu costruito un modello in gesso, conosciuta comunemente col nome del suo ideatore[31]), si ha modo di constatare che il *Catalogue* (di cui fino ad oggi non è stato possibile trovare un'eventuale edizione a stampa) comprendente le sue realizzazioni contava almeno 323 pezzi.[32] Le

[31] Descritta da Catalan in *Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbures en chaque point sont égaux et les signes contraires*, «Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris», XLI (1855), pp. 1019-1023. L'equazione parametrica di questa superficie, espressa utilizzando le coordinate polari del piano (r,φ), è:

$$x = a\sin 2\varphi - 2a\varphi + 1/2av^2 \sin 2\varphi;\ y = -a\cos 2\varphi - 1/2av^2 \cos 2\varphi;\ z = 2av\sin\varphi;$$

dove $v = 1/r - r$.

[32] La lettera, che si trova nella corrispondenza epistolare di Catalan custodita alla *Bibliothèque générale de l'Université de Liège*, è citata pure in F. Palladino, *Il Fondo di modelli e strumenti matematici antichi dell'Università di Padova*, cit., pp. 5-6. Nello scritto di Muret si parla non solo dell'esecuzione, che lui va facendo, del modello della "Surface cyclotomique", progettata da Catalan, ma vi è un *post scriptum* che dice: "Je joins à ma lettre un catalogue avec supplément. Depuis que ce dernier a paru, j'ai construit: 1. L'hélicoïde gauche, en fils de soie montés sur bronze, avec son paraboloïde de raccordement. […] 2. La surface d'égale pente de Mr de St Venant dont il est question au n° 323 de mon catalogue […]." La *Surface d'égale pente* è generata da una retta (*generatrice*) che si muove appoggiandosi ai punti di una curva piana (*curva direttrice*, per esempio un'ellisse) mantenendosi nel piano verticale condotto per la normale alla curva direttrice (per esempio all'ellisse) in ciascun punto di contatto e, inoltre, incontrando il piano della stessa curva direttrice sotto un angolo costante. Un modello materiale, semplice e naturale, di "Superficie di uguale pendenza" si ottiene scaricando, su di un ampio pavimento granaglia dalla sacca di un silos oppure sabbia da un imbuto: il mucchio (la pila) che viene a generarsi ha la forma di questa superficie (con buona approssimazione è un cono circolare retto).

Sull'attività di Muret nella costruzione di modelli è fatta citazione in un articolo contenuto nella raccolta di lavori matematici, *Mélanges Mathématiques*, tome troisième, 1888 (raccolta apparsa in «Mémoires de la Société Royale des Sciences», Bruxelles, F. Hayez, (2), tome XV, 1888); nell'articolo, il CCXXI, che ha per titolo *Sur une classe de surfaces gauches* fotografie dei modelli editi da Charles Delagrave furono portate all'esposizione tedesca (già ricordata ma della quale si parlerà con maggiore ampiezza), di modelli e strumenti, allestita nel 1893 a Monaco di Baviera: ne fa menzione il curatore del corrispondente *Katalog* (si veda pag. 246[33]), Walther Dyck (1856-1934).

Non vi sono molte testimonianze, rilevabili presso le sedi universitarie italiane più antiche, degli esemplari appartenuti a queste interessanti *collections*, ad eccezione di un cospicuo numero di modelli conservati, ancora oggi, al Dipartimento di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Genova.

È da segnalare, e il dato è molto significativo, che pezzi (probabilmente residui di intere serie) delle *Collections Muret* sono presenti nella stessa Germania; per esempio, tre sono al *Mathematisches Institut* della *Georg-August Universität* di Gottinga: si tratta, rispettivamente, delle superfici rappresentative delle equazioni $z = sin2x + 2siny + sin(x+y) + 10$ e $cosx + cosy + cosz = 0$ e, assieme a queste, del modello relativo alle "*Querschwingungen eines elastischen Stabes*" (l'etichetta è scritta in tedesco), cioè delle oscillazioni trasversali di una trave elastica; mentre numerosi altri sono all'*Institut für Mathematik* della *Technische Universität* (l'erede del *Mathematisches Institut* della *Technische Hochschule*, vale a dire il Politecnico) di Monaco di Baviera, in Barerstrasse, e riguardano, in senso più generale, le scienze delle costruzioni, quale è, ancora ad esempio, il modello descritto dall'etichetta (che non manca di indicare «Collections Muret. Ch. Delagrave et C.ie Éditeur. Rue des écoles 58. Paris»): "*Torsion d'un cylindre à base d'ellipse. Surface gauche*

–Novembre 1886–, è scritto in nota a p. 246: "Le modèle en a été construit par *Bardin* et par M. *Muret*."

[33] *Photographische Darstellungen der Sammlung von Gipsmodellen für den mathematischen Unterricht* von L.J. Bardin und Ch. Muret, ausgestellt von der Verlagshandlung von *Ch. Delagrave*, Paris. Proprio nel *Nachtrag* uscito nel 1893, in aggiunta al *Katalog*, vi è un interessante paragrafo (pp. 51-52), *Historische Notiz über die Modellsammlung von Muret*, redatto dal medesimo Muret.

$$z = \vartheta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} uv$$

affectée par ses sections primitives". Superficie *gauche* (cioè *rigata non sviluppabile*[34]) che reca disegnate, su di una sezione trasversale, le linee "*des points dangereux*". Oltre a quest'ultimo, altri sei modelli residui, dello stesso tipo, vale a dire riguardanti la teoria dell'elasticità dei corpi solidi, che illustrano sollecitazioni semplici – tipo torsione e flessione– di solidi geometrici (per esempio, prisma a sezione rettangolare o triangolare, cilindro circolare, ecc.), con espliciti riferimenti –che si colgono leggendo le etichette applicate– alle memorie di Saint-Venant,[35] sono pure presenti a Monaco di

[34] Una netta definizione di *Surface gauche* si può leggere in Lefebure De Fourcy, *Traité de Géométrie descriptive*, Paris, Libraire de l'École Polytechnique, 1842 (quatrième édition), p. 92: "Surfaces Gauches. On nomme ainsi les surfaces qui sont engendrées par une ligne droite, et qui ne sont pas développables."

[35] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingegnere e matematico francese, si occupò di resistenza dei materiali e di teoria dell'elasticità, ottenendo risultati che sono alla base della moderna scienza delle costruzioni. Di lui si ricordano, in particolare, il *Problema di Saint Venant* (che consiste nella determinazione dello stato di tensione in un solido elastico-lineare omogeneo ed isotropo di forma cilindrica, libero nello spazio, non soggetto a forze di massa ed in equilibrio sotto l'azione di forze di superficie agenti esclusivamente alle due basi del cilindro) e il *Principio di Saint Venant* (secondo il quale lo stato di tensione nel cilindro a sufficiente distanza dalle basi non cambia se si sostituiscono le distribuzioni con nuove distribuzioni e purché queste siano staticamente equivalenti alle prime), principio che può anche essere enunciato nella seguente forma equivalente: lo stato di tensione nel cilindro a sufficiente distanza dalle basi dipende unicamente dalla risultante e dal momento risultante dei carichi applicati alle basi stesse, e non dalla loro effettiva distribuzione. Al riguardo, un'ampia bibliografia è contenuta nell'articolo di F. Foce, *Saint-Venant prima del problema di Saint-Venant. Studi sulla resistenza dei materiale nel periodo 1837-1853*, in S. D'Agostino (a cura di), *Atti del II Convegno Nazionale di Storia dell'Ingegneria* (Napoli, 7-9 aprile 2008), Napoli, Cuzzolin editore, 2008, vol. 1, pp. 551-562.

Baviera: conservati assieme ad altri che riguardano corde vibranti, ecc., rappresentano, come si è ipotizzato, i resti di quelle che probabilmente saranno state intere collezioni prodotte dal Muret e a suo tempo acquistate.

Per il Regno Unito, due appuntamenti espositivi di particolare rilevanza permettono di valutare gli interessi degli studiosi di quel Regno per i modelli matematici, delle realizzazioni che essi furono capaci di fare e di quanto –e ciò avvenne in misura maggiore– fossero recepiti i contributi provenienti da matematici e istituzioni matematiche francesi e, ancora, dalle istituzioni, numerose e fiorenti, presenti per tutta quell'area europea che, con a capo la Prussia, si andava unificando nell'esteso e progredito stato germanico.

Il primo dei due eventi fu promosso dal *Dipartimento di Scienze ed Arte*, costituito nel 1853 e posto, nel 1856, sotto la direzione del *Comitato del Consiglio per l'Educazione* (*Dipartimento* divenuto perciò: *Science and Art Department of the Committee of Council on Education*, insediato presso il *South Kensington Museum* –oggi *Science Museum*– di Londra). Furono proprio i *Lords* del *Committee* a deliberare, il 22 gennaio del 1875, la formazione di una *Loan Collection of Scientific Apparatus* che doveva

> […] to include not only apparatus for teaching and for investigation, but also such as possessed historic interest on account of the persons by whom, or the researches in which, it had been employed.

Fu creato a tal fine un apposito comitato per la formazione della collezione, la quale avrebbe dovuto assumere, in forma stabile, la portata e i compiti istituzionali che in Francia aveva il *Conservatoire des Art et Métieres*. L'esposizione, aperta a maggio del 1876 e che si prevedeva di allestire nelle sale del *South Kensington Museum*, fu, a causa del gran numero di oggetti provenienti dal Regno Unito e dal continente europeo, allestita invece, in questa circostanza, nelle più vaste "galleries on the western side of the Horticultural Gardens" messe a disposizione dai commissari che avevano curato l'*Exhibition* *of the Works of Industry of all Nations* del 1851. Un *Handbook* e un *Catalogue*[36] furono pubblicati in rapporto all'esposizione organizzata.

Nel consultare quest'ultima pubblicazione si ha modo di riscontrare la presenza della *Collection of Models of Ruled Surfaces, constructed by Fabre De Lagrange, in 1872, for the South Kensington Museum*. Essa è compresa nella seconda (dal titolo "*Geometry*") delle sezioni espositive (tutte quante ivi descritte e ora qui elencate in nota). Si tratta di 45 superfici, rigate, realizzate in filo, costruite dal francese De Lagrange e per le quali era stato pure stampato, nel 1872, un'apposita pubblicazione a cura del già visto *Science and Art Department of the Committee of Council on Education*, dal titolo *A Catalogue of a Collection of Models of Ruled Surfaces*.[37] (Modelli di superfici rigate di Fabre De Lagrange furono acquistati anche dalla *Escola Politécnica de Lisboa* per la cattedra di *Geometria Descritiva*. Attualmente essi sono al *Museu de Ciência da Universidade de Lisboa*, alcuni conservano ancora l'etichetta originale[38]).

Accanto a queste superfici rigate vi erano esposte altre 14 superfici raccolte sotto il nome di *Plücker Model's*: erano delle

---

[36] Nella tavola dei *Contents* del *Catalogue of the Special Loan Collection of Scientific Apparatus at the South Kensington Museum* (questo è il suo titolo completo), London, Printed by George E. Eyre and William Spottiswoode, 1877 (terza edizione) sono elencate le seguenti 20 sezioni espositive: 1)Arithmetic, 2)Geometry, 3)Measurement, 4)Kinematics, Statics, and Dynamics, 5)Molecular Physics, 6)Sound, 7)Light, 8)Heat, 9)Magnetism, 10)Electricity, 11)Astronomy, 12)Applied Mechanics, 13)Chemistry, 14)Meteorology, 15)Geography, 16)Geology and Mining, 17)Mineralogy, Crystallography, etc., 18)Biology, 19)Educational Appliances, 20)Miscellaneous.

[37] *Constructed by M. Fabre De Lagrange; with an Appendix, Containing an Account of the Application of Analysis to Their Investigation and Classification, by C.W. Merrifield*, London, Printed by George E. Eyre and William Spottswoode.

[38] Si veda A.R. Lozano, S.M. de Nápoles, *Superfícies regradas: manipulação e visulização, Projecto matemática em Acção*, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da Universidade de Lisboa, reperibile in formato elettronico sul corrispondente *web-site*.

quartiche, in legno (fatte dal costruttore Epkens di Bonn), possedute dalla *London Mathematical Society*.

Altre singole, interessanti realizzazioni ebbero il loro posto alla mostra, come, per esempio, la famosa *Steiner's Surface* (o *Superficie romana di Steiner*, così detta perché, stando alla testimonianza di Eugenio Beltrami –1835-1900– essa fu ideata da Jacob Steiner –1796-1863– durante un soggiorno a Roma avvenuto nel 1844[39]): è una superficie razionale del quarto ordine e di terza classe, a simmetria tetraedrale, di equazione cartesiana: $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0$; e, ancora per fare un esempio, l'altrettanto famosa *Superficie diagonale* (*Diagonalfläche*) *di Clebsch*, che va considerata come la superficie principale tra quelle regolari (vale a dire senza punti singolari) del terzo ordine: esse, che hanno un'equazione generale della forma

$\sum_i a_i x_i^3 = 0$, per i=1,…,5 (detta *equazione pentaedrale*)

–dove $x_i = 0$ sono le equazioni di cinque piani formanti il cosiddetto *pentaedro di Sylvester*, mentre tra le cinque x sussiste la relazione identica $\sum_i x_i = 0$, per i=1,…,5–, contengono 27 rette, ma solo per la *Diagonalfläche* (che si ottiene dall'*equazione pentaedrale* ponendo a_i =1, per i=1,…,5) tutte quante queste rette sono distinte e reali.[40] La *Superficie diagonale* affascinò molti artisti, tra i quali Man Ray e Max Ernst, come si dirà nella parte finale di questo articolo.

Sotto vari aspetti –scientifico, didattico, storico– è interessante la testimonianza secondo cui il noto matematico inglese, James Joseph Sylvester (1814-1897) che molto contribuì anche all'avanzamento della matematica negli Stati Uniti d'America, aveva in progetto "di far costruire in filo metallico il sistema delle 27 rette esistenti in una superficie di 3° ordine e di farne trarre delle copie stereoscopiche",

---

[39] La testimonianza di Beltrami fu raccolta a voce da Francesco Gerbaldi (1858-1934) che ne riferisce nel suo articolo *La superficie di Steiner studiata sulla sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche*, Stamperia reale di Torino di I. Vigliardi, 1881, p. 5.

[40] O, se si vuole, il gruppo delle proiettività che conservano la superficie è il più grande possibile: S_5. Il prototipo di questo modello, in gesso, fu costruito da Christian Wiener (1826-1896) su indicazione di Alfred Clebsch (1833-1872).

intenzione che aveva annunciato in un suo scritto, dal titolo *Note sur les 27 droites d'une surfaces du 3^{e} dégree*, apparso nei *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* di Parigi del 1861.[41] Così si legge in una lettera di Luigi Cremona (1830-1903) a Thomas Archer Hirst (1830-1892) del 18 Gennaio 1865.[42] Pur essendosi effettuata qualche indagine bibliografica, non è stato possibile accertare se Sylvester riuscì a realizzare il suo intento; si è appurato invece che Christian Wiener pubblicò, nel 1869, un opuscolo, *Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Mit erläuterndem Texte*,[43] in cui vi erano presenti due fotografie stereoscopiche della *Superficie diagonale*.

Le ultime informazioni fornite danno l'occasione per segnalare che sull'effetto rilievo (visione tridimensionale), realizzato mediante la tecnica degli *anaglifi* (la quale è strettamente connessa a quella della *visione stereoscopica*), applicata, modernamente, al tipo di superfici geometriche di cui si sta trattando, è stato compiuto recentemente uno studio da parte di Nicla Palladino i cui risultati sono raccolti nell'articolo, citato, *Gli anaglifi di Vuibert. Origine storica e applicazioni in didattica basata sui modelli di superfici matematiche*.

L'altro importante evento organizzato nel Regno Unito fu l'esposizione di Edimburgo del 1914 (la *Napier Tercentenary Exhibition* avutasi in occasione del tricentenario della pubblicazione dell'opera di Nepero *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*), dove oltre a libri, strumenti e apparecchi per il calcolo numerico e grafico furono esposti modelli di superfici matematiche; e anche in questo caso fu stampato un *Handbook* seguito, nel 1915, da un *Memorial Volume*. (L'unico italiano presente con una propria

---

[41] Vol. LII, pp. 977-980.

[42] La testimonianza si trova in L. Nurzia, *La corrispondenza tra Luigi Cremona e Thomas Archer Hirst (1864-1892)*, in L. Nurzia (curatrice), *Per l'Archivio della Corrispondenza dei Matematici Italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, vol. IV, Quaderni P.RI.ST.EM. – Università "L. Bocconi", Milano –, n. 11, Palermo, 1999, p. 72.

[43] Leipzig, B.G. Teubner.

realizzazione all'*Exhibition* fu Ernesto Pascal che espose uno strumento, un integrafo[44]).

La lettura, ora effettuata, della realtà del Regno Unito mediante i principali avvenimenti espositivi (che è sembrata essere la chiave interpretativa migliore) non libera però dall'obbligo di avvertire che anche lì furono verosimilmente non pochi i costruttori, di notevole importanza, che produssero anche modelli matematici intesi in senso più o meno stretto. La presenza, a Napoli, presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" di un residuo di 6 *Model of penetration* ("solidi compenetrati") in legno duro lucidato (*hard wood polished*) porta a segnalare la ditta costruttrice fondata da George Cussons *senior*, nel 1876, a Lower Broughton, presso Manchester, per la "manifacture of Educational and Scientific Apparatus". La *G. Cussons & Co.* fornì apparecchi e strumenti ai laboratori di numerose sedi universitarie del Regno Unito, dell'Impero britannico e di altri luoghi d'Europa e del mondo; una collezione di tali apparecchi scientifici è oggi conservata al *Museum of Science and Industry* di Manchester.[45] Una copia –da ritenersi abbastanza rara– del catalogo illustrato, edito dalla *G. Cussons Ltd, The Technical Works*, dal titolo *Apparatus for Practical Plane and Solid geometry*, che comprende anche i "solidi compenetrati" (dove è specificato che per ogni singola realizzazione *The two solids of interpenetration are made one of dark and one of light wood*) accennati è stata ritrovata e fotocopiata dagli autori del presente articolo. La copia non reca l'anno di edizione ma dalla messa in evidenza, sulla copertina, dei premi internazionali ricevuti dalla ditta si deduce che il termine *post quem* è l'anno 1911.

La più importante esposizione internazionale riguardante modelli, apparecchi e strumenti della matematica e della fisica-matematica fu quella che si svolse a Monaco di Baviera, nel 1893. E così si viene ora a parlare più estesamente della Germania. L'esposizione si tenne in

[44] Si può vedere il citato F. Palladino, *Uno specimen dei giacimenti italiani di modelli e strumenti matematici*, pp. 358-360.

[45] Cfr. J. Wetton, *Scientific Instrument Making in Manchester, 1870-1940. II: Thomas Armstrong & brother, and C. Cussons & Co*, «Scientific Instrument Society Bulletin», 52, March 1997, pp. 5-8.

occasione del convegno dell'associazione dei matematici tedeschi, fondata nel 1890, la *Deutsche Mathematiker–Vereinigung*. (In verità l'evento, combinato, doveva tenersi nel 1892 a Norimberga ma per la "crisi sanitaria" che in quell'anno investì la Germania –la città di Amburgo fu assalita da un'epidemia di colera– fu rimandato all'anno successivo). Per la circostanza fu edito, a cura del citato Walther Dyck col quale collaborarono "numerosi esperti colleghi", un *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* (seguito da un supplemento, edito nel 1893, ovvero un *Nachtrag*) da considerarsi come una sorta di "sintesi universale", a carattere teorico-documentale, in cui furono elencati e illustrati tutti i pezzi provenienti dai cataloghi specialistici (compreso ovviamente l'importantissimo *Catalog* di Ludwig Brill) fino alle singole, non meno interessanti realizzazioni eseguite da isolati autori.

Il *Katalog* del Dyck è diviso in tre sezioni: I) Aritmetica, Algebra, Teoria delle Funzioni, Calcolo integrale; II) Geometria; III) Matematica Applicata. Nell'*Introduzione* è scritto che la gran parte degli istituti matematici, fisici, tecnico-meccanici e geodetici delle scuole superiori (università e politecnici) tedesche e straniere avevano messo a disposizione i modelli prodotti negli istituti stessi così come pure gli apparecchi, alcuni dei quali di valore storico, delle loro raccolte. È scritto, inoltre, che da musei, collezioni private, da singoli studiosi, giunsero adesioni, e che oltre alla Germania presero parte all'esposizione gli Stati Uniti d'America, la Francia, l'Italia,[46] i Paesi

[46] Scorrendo il *Katalog* del Dyck si trova che l'unico nome di un italiano che avrebbe dovuto esporre già a Norimberga è quello di Pietro Fiorini, nato a Sora (Regno delle Due Sicilie, Provincia di Terra di Lavoro –corrispondente con una certa approssimazione all'attuale Provincia di Caserta; ma Sora è dal 1927 in Provincia di Frosinone–) nel 1852 e morto in Torino, città in cui prevalentemente visse ed esercitò la libera professione di ingegnere (si era laureato però in ingegneria a Bologna), nel 1912. Fiorini presentò un compasso "a quattro punte" (*Zirkel mit vier Spitzen* nach *Fiorini-Vergnano*, ausgestellt von Ingenieur *P. Fiorini*, Turin, p. 226 del *Katalog*) e un perspettografo, cioè uno strumento riduttore a proiezione centrale (p. 243 del *Katalog*). Mentre se si scorre il *Nachtrag* si ritrova, unico italiano, Nicodemo Jadanza, nato a Campolattaro (Regno delle Due Sicilie, Provincia del Molise; ma dal 1861 Campolattaro appartiene alla Provincia di

Bassi, la Norvegia, la Svizzera, l'Austria-Ungheria, la Russia e che, in particolare, in Inghilterra si formò un comitato, con alla testa Lord Kelvin, Greenhill e Henrici, per essere presenti all'esposizione con i migliori pezzi provenienti da raccolte pubbliche e private. È da segnalare che il *Katalog* reca all'inizio ben otto saggi teorici (che si sviluppano per le prime 136 pagine), illustranti numerosi settori d'impiego del materiale esposto, scritti da F. Klein, A. Voss, A. Brill, G. Hauck, A. von Braunmühl, L. Boltzmann, A. Amsler, O. Henrici.

Benevento, in Campania) nel 1847 e morto a Torino nel 1920. Jadanza, che si era laureato in Matematica (nel 1869) all'Università di Napoli, era diventato, per concorso, professore di Geodesia all'Università di Torino dove aveva fondato il corrispondente, importante Istituto che andò distrutto per i bombardamenti verificatisi nel corso della Seconda Guerra Mondiale. Gli strumenti esposti da Jadanza a Monaco furono cinque: prisma universale Jadanza; cannocchiale terrestre accorciato; plesiotelescopio; un nuovo apparato per misurare basi topografiche; microscopio ad ingrandimento costante. Essi furono presentati con l'accompagnamento di un ampio commento illustrativo e bibliografico (pp. 110-111 del *Nachtrag*) redatto da Sebastian Finsterwalder (1862-1951), professore al Politecnico di Monaco di Baviera e già discepolo di L. Brill sotto la cui guida aveva eseguito numerosi modelli in gesso appartenenti alle prime dieci serie del *Catalog Brill-Schilling*.

Il nome di Ulisse Dini è invece presente nel *Katalog* (p. 292), e precisamente nella didascalia (dove vengono date le indicazioni bibliografiche dei lavori teorici che hanno ispirato la realizzazione del modello) della *Superficie elicoidale a curvatura costante negativa*, la cui curva meridiana è una *trattrice* (*Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass*). Analogamente, Luigi Bianchi compare al modello successivo *Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien nach Enneper* (che possiede un sistema di linee di curvatura piane: è del tipo delle *Superfici di Enneper* ma, diversamente da queste, che sono esplicitamente formulabili mediante funzioni ellittiche, essa è rappresentabile mediante funzioni elementari). Fu studiata, ispirandosi a Bianchi, e realizzata da Thomas Kuen. È la famosa *Superficie di Kuen* che tanto interessò i surrealisti: essa sembra raffigurare quel componente di una banda musicale –di quelle che si vedono sfilare, per esempio, nelle feste patronali– che, impettito come un pinguino o come in una posa del famoso attore comico Totò, suoni i piatti di ottone.

Nello stesso 1893, in occasione del *Congress on Mathematics and Astronomy*, svoltosi a Chicago (dal 21 al 26 Agosto) nell'ambito della *World's Columbian Exposition*, oltre a una mostra di modelli vi fu una serie di conferenze di Felix Klein, date anche presso sedi universitarie, in cui questi illustrò le proprietà di alcuni modelli matematici, specialmente di quelli, numerosi, ideati da lui e da Alexander Brill e costruiti presso l'Istituto di matematica del Politecnico (allora *Technische Hochschule*, oggi *Technische Universität*, come si è detto) di Monaco di Baviera.[47]

Dopo gli appuntamenti espositivi del 1893, il *Terzo Congresso Internazionale dei Matematici*, del 1904, organizzato in Germania, ad Heidelberg, offrì un'altra consistente esposizione di modelli matematici (fatti in gesso, carta, filo e metallo) realizzati, si badi, nei dieci anni compresi tra il 1893 e il 1904. (Anche ad Heidelberg furono esposti, accanto ai modelli, strumenti come integrafi, analizzatori armonici, macchine calcolatrici, ecc.). Nel complesso, tra modelli e strumenti, furono esposti circa 300 pezzi da parte di quasi 25 espositori e le collezioni (organiche) più importanti presenti furono quelle di Hermann Wiener (realizzata presso il *Mathematiches Institut der technischen Hochschule* di Darmstadt), di Martin Shilling (la cui casa editrice era allora in Halle an der Saale, come si è detto), dei Politecnici di Darmstadt e Karlsruhe, dell'Università di Gottinga, della Zeiss di Jena per gli strumenti ottici (che presentò, tra l'altro, una nuova forma di "lavagna luminosa"), della ditta Chateau Frères di Parigi (produttrice di macchine calcolatrici) e di Gottlieb Coradi (1848-1929) famoso costruttore di strumenti, come integrafi (utili per la risoluzione di equazioni numeriche, per l'integrazione di equazioni

[47] "Two afternoons were devoted mainly to the explanation and discussion of mathematical models and other appliances, of which an extensive collection had been arranged by Prof. Klein and Dyck. Many of the models were unfamiliar to those present, and the opportunity for their examination was highly appreciated." Così è scritto nel resoconto, a cura di H.W. Tyler (professore al *Massachusetts Institute of Technology*), pubblicato nel «Bulletin of New York Mathematical Society» dell'Ottobre del 1893. Resoconto riportato pure nel «Giornale di Matematiche» (Napoli), XXXI, 1893, p. 377.

differenziali, per il calcolo di sforzi e momenti flettenti richiesto nei campi più diversi, da quello dei trasporti terrestri a quello delle costruzioni navali), planimetri (utilizzati per calcolare aree, specialmente in ambito catastale), analizzatori, ecc., la cui ditta aveva sede in Zurigo.[48]

Nonostante Gino Loria (1862-1954) spronasse, con le seguenti parole, i matematici italiani, dalle pagine del *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche*, a partecipare all'esposizione di modelli che si sarebbe allestita ad Heidelberg:

> Sarebbe desiderabile che anche l'Italia partecipasse a siffatta mostra; ad es. non sarebbe possibile rintracciare ed inviare quel modello di superficie pseudo sferica costruito dal Beltrami nell'epoca in cui elaborava il suo celebre *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea*?[49]

la sua chiamata sortiva lo stesso effetto di una *vox clamantis in deserto*: pur essendosi portata, la ricerca matematica italiana, su posizioni d'avanguardia (si è accennato, in nota, ai contributi teorici di Dini e Bianchi), appena però il discorso cominciava a riguardare

---

[48] Al riguardo si vedano: *Verhandlungen des III.Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8.bis 13.August 1904*, hrsg. Schriftführer des Kongresses Dr. A. Krazer Professor an der technische Hochschule Karlsruhe, Leipzig, B.G. Teubner, 1905 (gli atti sono divisi in tre parti, la terza –sotto il nome di *Die Literatur und Modellausstellung*– dà conto dell'esposizione, fatta di libri, modelli e strumenti, e delle relative conferenze tra le quali vi è una di H. Wiener e un'altra del menzionato Friedrich Schilling); H.W. Tyler, *The International Congress of Mathematicians at Heidelberg*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 11, n° 4 (1905), pp. 191-205; J. Barrow-Green, *International Congresses of Mathematicians from Zurich 1897 to Cambridge 1912*, «The mathematical Intelligencer», vol. 16 (1994), n° 2, p. 40, dove è scritto: "Another feature of the congress which provoked considerable interest was an extensive exhibition of mathematical literature, apparatus, and models. About 300 models were exhibited, including not only the usual plaster, paper and thread types but also integrators, harmonic analysers, calculating machines, instruments for drawing curves and solving equations, and kinematical models."

[49] Anno VII (1904), p.64.

applicazioni e investimenti, per quanto di piccolo importo, affioravano le difficoltà e i ritardi.

Nel settore dei modelli, la novità, la cui maturazione era stata accelerata proprio dalla celebrazione del congresso di Heidelberg, era rappresentata dal sorgere di un'altra vasta (e organica) raccolta, quale era quella di Hermann Wiener (la *Sammlung mathematischer Modelle*) che si perfezionerà con l'edizione, per G.B. Teubner in Leipzig, del corrispondente catalogo (consistente in otto *Reihen* –sarà usato infatti il termine *Reihe* e non più *Serie*, come invece veniva fatto nel *Catalog di Schilling*, per indicare una serie di modelli–) pubblicato per la prima volta nel 1905, vale a dire del citato *Verzeichnis Mathematischer Modelle*.[50] L'editore Teubner pubblicò poi, nel 1911, il *Verzeichnis von H. Wieners und P. Treutlins Sammlungen mathematischer Modelle*, pure questo già menzionato (copie della seconda edizione, del 1912, sono state trovate a Napoli e a Firenze, ai Dipartimenti già indicati) in cui vennero a giustapporsi l'elenco della precedente raccolta (ingrandita però da otto a dodici serie) di H. Wiener e quello della raccolta (18 serie per più di 200 modelli) di P. Treutlein (direttore del *Goethe-Gymnasium* di Karlsruhe).

Si vuol far notare, di passaggio, che Peter Treutlein, con le sue tesi e le sue esperienze sull'insegnamento intuitivo della geometria, destinato agli scolari fino a circa dodici anni di età, molto influenzò, all'inizio del Novecento, l'insegnamento, in Giappone, della geometria che veniva ad impartirsi in quelle fasce scolastiche che oggi, in Italia, vanno sotto i nomi di scuola primaria e scuola secondaria di primo grado.[51] Egli godette naturalmente di un forte prestigio anche in Germania, infatti ne fu il rappresentante per l'insegnamento di ordine medio (gli altri due delegati erano F. Klein, per l'insegnamento universitario, e Paul Stäckel per la matematica nei

---

[50] Due copie di questo catalogo sono state individuate presso il Dipartimento di Matematiche e Applicazioni dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II", una di esse era appartenuta ad Ernesto Cesàro.

[51] Si veda T. Fujita, K. Jones, S. Yamamoto, *The role of intuition in geometry education: learning from the teaching practice in the early 20th century*, «Proceedings of 10th International Congress on mathematical Education, Copenhagen 2004; –ICME-10 TSG29–».

politecnici) nella *Commissione Internazionale dell'Insegnamento Matematico* (presidente lo stesso Klein) costituita, nel 1908, per decisione presa nell'ambito dei lavori del *IV Congresso Internazionale dei Matematici*, svoltosi in quell'anno a Roma. In un convegno di questa *Commissione*, inserito nel programma dell'*Exposition Universelle de Bruxelles*, del 1910, Treutlein tenne una conferenza sull'uso dei suoi modelli geometrici nell'insegnamento (mentre Klein illustrò quelli del *Catalog Brill/Schilling* utili all'insegnamento "superiore").[52]

Per quanto riguarda poi Hermann Wiener, è da sottolineare che egli, a somiglianza di quanto si è fatto notare per Hilbert, mentre sosteneva uno studio della pura geometria fatto senza l'ausilio di immagini ma piuttosto con metodo assiomatico, era impegnato, alternativamente, nella progettazione e, nel suo caso, realizzazione di modelli plastici per gli specifici vantaggi che essi potevano offrire innanzitutto nell'insegnamento, ma anche per mettere in evidenza alcuni aspetti riguardanti la ricerca.

4. Lo svolgimento della vicenda connessa all'ideazione e alla costruzione di modelli matematici non vede l'Italia collocata in un ruolo di primo piano. L'Italia dipenderà dalla produzione degli altri paesi europei come Francia, Germania, Inghilterra. E per tale ragione si è provveduto a dare in precedenza un quadro abbastanza dettagliato di quanto accadeva nei paesi più progrediti in questo settore: nel visitare i cospicui "fondi" museali presenti in Italia si vede che i canali di approvvigionamento (anche se non tutti strettamente accompagnati da documenti d'archivio[53]) che arrivano, per fare degli esempi, a Luigi

---

[52] Cfr. L. Giacardi, *The First Century of International Commissionon Mathematical Instruction (1908-1910)*, in web-site: http://www.icmihistory.unito.it; e H. Fehr, *Circulaire n. 3. Compte rendu des séances de la Commission et des conférences sur l'einseignement scientifique et sur l'enseignement technique moyen*, «L'Einseignement Mathématique», 12, 1910, pp. 353-415.

[53] Una relazione a stampa, dal titolo *La Regia Università di Napoli a S.E. l'on. Ministro della Pubblica Istruzione. Voti e deliberazioni della Facoltà*

Cremona e poi a Guido Castelnuovo (1865-1952) a Roma, a Ulisse

---

di Medicina, di Scienze naturali e di Matematiche sulle dotazioni agli Istituti scientifici ed altri bisogni dell'Insegnamento (edita a Napoli nel 1884 presso la Tipografia dell'Accademia reale delle Scienze, appartenuta probabilmente alla Biblioteca dell'ex *Seminario matematico* e custodita oggi tra gli opuscoli della Biblioteca del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"), contiene –al punto XI. *Gabinetto per i modelli di geometria*– il seguente passo: "A Pisa, Roma, Torino e Pavia, ecc. queste collezioni si sono già avute da molti anni; ma qui non è stato ancora possibile averle non ostante le ripetute domande della facoltà di matematica. Si ha fiducia che si vorrà una buona volta provvedere". Accompagnato a ciò, vi è una lettera (conservata presso lo stesso Dipartimento, *Fondo documentario Francesco Siacci*) di Ettore Caporali, del 1884 –anno in cui questi, già professore straordinario di Geometria superiore a Napoli, dal 1878, passa ad ordinario presso la stessa Università– nella quale, rivolgendosi a un collega della medesima sede, egli scriveva: "Stimatissimo Sig.r Professore. Sono del parere che convenga acquistare per intero la serie prima (pagina 9 del catalogo) e la serie settima (pag. 20) le quali importano insieme 360 marchi, pari a 450 lire. Le rimanenti 50 lire saranno assorbite dalle spese d'imballaggio e trasporto […]". In mancanza fino ad oggi di una copia del *Catalog mathematischer Modelle* di Brill, si è effettuato un controllo sul *Catalog di Schilling* (che ne rappresenta la naturale continuazione). La prima serie era costituita da cinque modelli in gesso (*Gipsmodelle nach Originalen des mathematischen Instituts der kgl. Technischen Hochschule, München*) riguardante argomenti diversi (*Superficie di rotazione della trattrice*, *Superficie focale di un sistema di raggi*, *Superficie dei centri di curvatura [o Superficie Centro, n.d.r.] di un iperboloide a una falda*, ecc.), mentre la settima (*Gipsmodelle von Flächen 3 Ordnung nach Rodenberg*) riguardava superfici del terzo ordine, le hessiane di alcune di esse, ecc. Nel *Catalog* dello Schilling, edizione 1903, il costo totale delle due intere serie risulta ancora essere di 360 marchi. Quasi tutti questi modelli sono a tutt'oggi presenti presso il Dipartimento "R. Caccioppoli".

Per quanto riguarda poi l'Università di Torino i primi acquisti di modelli risalgono all'anno scolastico (così era chiamato allora l'anno accademico) 1880-'81, al tempo in cui fu rettore Enrico D'Ovidio (si veda L. Giacardi, *La collezione di modelli geometrici della Biblioteca Speciale di Matematica "G. Peano"*, in *Le Memorie della Scienza*. *Musei e Collezioni dell'Università di Torino*, a cura di G. Giacobini, Università degli Studi di Torino e Fondazione CRT, 2003, pp. 251-266).

Dini (1845-1918) e poi Luigi Bianchi (1856-1928) e Riccardo de Paolis (1854-1892) a Pisa, a Enrico D'Ovidio (1843-1933) e poi Corrado Segre (1863-1924) a Torino, a Eugenio Beltrami (1835-1900) e poi Ernesto Pascal a Pavia,[54] a Ettore Caporali (1855-1886), Pasquale Del Pezzo (1859-1936) e poi Ernesto Cesàro a Napoli, a Giuseppe Veronese a Padova, a Gino Loria (1862-1954) a Genova, provengono proprio dalle tre nazioni indicate, e, per la maggior parte dei modelli, il grande flusso si avvia, in ordine di tempo, poco dopo il 1877, che è l'anno in cui ha inizio l'attività della casa editrice aperta da Ludwig Brill in Darmstadt.

Con la formazione del nuovo Regno d'Italia i problemi istituzionali, finanziari, legislativi, militari, scolastici, e così via, sono molteplici e impegnativi e, si potrebbe aggiungere, non sempre affrontati con "visione unitaria". In campo scientifico, l'area della ricerca ad indirizzo matematico è, allora, quella che più velocemente progredisce (portandosi, verso la fine dell'Ottocento, ai primi posti in Europa[55]), anche perché è la meno condizionata, ai fini della fioritura di validi cultori, dalla necessità di forti investimenti finanziari.

---

[54] Nel secondo volume del menzionato *Repertorio*, dedicato alla *Geometria*, Pascal fa espliciti riferimenti ai modelli in gesso presenti a Pavia. Per esempio, a p. 469 si legge: "Di tutte queste ciclidi sono stati costruiti modelli in gesso (v. il *Catalog math. Modelle* von Brill in Darmstadt); esemplari di questi modelli sono anche posseduti dall'Istituto matematico dell'Università di Pavia"; e a p. 480: "Nel più volte citato catalogo di L. Brill, esistono modelli di superficie di Steiner; essi fanno anche parte della raccolta posseduta dall'Istituto matematico dell'Università di Pavia".

[55] Tanto da spingere Rudolf Lipschitz (1832-1903) a felicitarsi con Beltrami (in una lettera dei primi anni Settanta dell'Ottocento) poiché in Italia e in Germania i matematici respiravano ormai la stessa aria: "In Italien und Deutschland ist es doch dieselbe Luft, die wir athmen." Dove *athmen* è scritto con la *h* secondo l'ortografia ottocentesca, oggi è *atmen*. Il passo è riportato in F. Palladino, N. Palladino, *Dalla "Moderna geometria" alla "Nuova geometria italiana". Viaggiando per Napoli, Torino e dintorni*, Firenze, Olschki, 2006, p. XV. Questa constatazione si accoppia con l'altra fatta da G. Darboux nel corrispondere con J. Houël: "Je crois que si cela continue les Italiens nous dépasseront avant peu. Aussi tâchons avec notre Bulletin de réveiller ce feu sacré et de faire comprendre aux Français qu'il y

Dai valenti matematici che contribuirono al "risorgimento" politico italiano, come Giuseppe Battaglini (1826-1894),[56] Enrico Betti (1823-1892), Francesco Brioschi (1824-1897), Luigi Cremona,[57] vennero molteplici iniziative, scientifiche, didattiche, editoriali, legislative, volte a rinvigorire l'istruzione, in particolare di quella superiore. Con senso di responsabilità, i "matematici risorgimentali" non guardarono soltanto allo stretto del loro settore di studio. Così, per esempio, Brioschi, professore all'Università di Pavia –in questa città aveva luogo l'unica sede universitaria della Lombardia–, prossimo a fondare l'Istituto Tecnico Superiore di Milano (legalmente istituito nel 1862 e aperto nel Novembre del 1863 –dal 1937 esso prenderà il nome attuale di Politecnico–), di cui ne assunse subito la direzione che mantenne fino alla morte, si occupa, da Segretario generale del Ministero della Pubblica istruzione (carica che egli coprì dal Luglio del 1861 a Dicembre del 1862) di scrivere, da Torino (il nuovo Regno ha provvisoriamente la città piemontese per capitale), a Betti che è professore a Pisa:[58]

---

a un tas de choses dans le monde dont ils ne se doutent pas, et que si nous sommes toujours la Grande nation, on ne s'en aperçoit guère à l'étranger" (si veda *La correspondance de G. Darboux avec J. Houël. Chronique d'un rédacteur (déc. 1869-nov. 1871)* a cura di H. Gispert, «Cahiers du Séminaire d'histoiredes mathématiques», Paris, Institut Henri Poincaré, n° 8 (1987), pp. 67-202, lettera 46, non datata, p. 160).

[56] Si può vedere *Giuseppe Battaglini. Raccolta di lettere (1854-1891) di un matematico al tempo del Risorgimento d'Italia*, a cura di M. Castellana e F. Palladino, Bari, Levante, 1996.

[57] Intorno alle figure di Betti, Brioschi, Cremona, si può consultare anche il volume, recente, *Per la costruzione dell'Unità d'Italia. Le corrispondenze epistolari Brioschi-Cremona e Betti-Genocchi*, a cura di N. Palladino, A.M. Mercurio, F. Palladino, Firenze, Olschki, 2009; e, per Cremona e Genocchi, si può vedere anche *L'Epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata*, a cura di L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, Firenze, Olschki, 2001.

[58] Passo riportato nel volume, citato, *Per la costruzione dell'Unità d'Italia. Le corrispondenze epistolari Brioschi-Cremona e Betti-Genocchi*, p. IX.

Il Ministero ha determinato di mandare all'estero otto o dieci giovani laureati in Matematica per dedicarsi allo studio della Chimica, della Fisica, della Mineralogia e della Meccanica applicata alle macchine. Si darà loro 1500 franchi all'anno e se riescono bene al ritorno saranno destinati all'insegnamento. Desidero che tu d'accordo coi tuoi amici e colleghi mi proponesti due o tre giovani Toscani laureati recentemente (o da poco tempo) i quali abbiano dati sicure prove di ingegno e di amore allo studio, ed accettassero colle condizioni suddette di dedicarsi a quegli studj.

Nel clima postrisorgimentale l'allora giovane professore dell'Università di Padova, Giuseppe Veronese, studioso di geometria proiettiva degli iperspazi (era stato per un anno –1880-'81– a perfezionarsi in Germania dove aveva soggiornato pure presso Felix Klein, allora che questi era all'Università di Lipsia) che di lì a poco verrà ad ideare una famosa "superficie" che porta il suo nome,[59] si fa promotore, nel Novembre del 1883, di una relazione,[60] sostenuta dalle lettere di Francesco Brioschi, Enrico D'Ovidio, Riccardo de Paolis, Ulisse Dini ed Eugenio Bertini (1846-1933), al Ministro della Pubblica Istruzione, Guido Baccelli, in cui chiede che all'Università dove insegna si possa aprire un "Atelier", ovvero un laboratorio, per costruire modelli matematici, simile a quelli che funzionano in altri paesi europei, in modo da permettere alle istituzioni universitarie italiane di poter ottenere con minor spesa, evitando di ricorrere ad acquisti all'estero, quel poco di strumentazione utile per "fare matematica". Nel suo scritto egli ricorda preliminarmente:

Al Politecnico di questa città [Monaco di Baviera] è annesso un Istituto matematico, il quale si compone sin dal 1875 d'una Collezione, di una Biblioteca

---

[59] Si tratta di una superficie a due dimensioni di uno spazio a cinque dimensioni che, nella sua più semplice espressione, può essere rappresentata dall'equazione parametrica $x_1 = u^2$, $x_2 = uv$, $x_3 = v^2$, $x_4 = u$, $x_5 = v$, dove $x_1,\dots,x_5$, sono coordinate non omogenee dello spazio e u e v sono due parametri indipendenti. Lo studio di questa superficie è equivalente, dal punto di vista proiettivo, allo studio di tutte le *coniche del piano*, e una sua proiezione nello spazio ordinario è la *Superficie romana di Steiner*.

[60] Essa è riprodotta integralmente in F. Palladino, *Il Fondo di modelli e strumenti matematici antichi dell'Università di Padova e l'iniziativa di Giuseppe Veronese per un Laboratorio Nazionale Italiano*, cit., pp. 59-62.

per i membri (Professori e studenti), del Seminario matematico, ed un Atelier. La Collezione conta oltre 500 modelli di Geometria superiore, Fisica-matematica, e Meccanica. L'Atelier è fornito di ordigni, apparati, torni per la costruzione di modelli in legno e gesso. Questi sono talvolta il risultato di ricerche speciali degli stessi Professori dei corsi superiori della Facoltà matematica e del Politecnico. Quando se ne è raccolto un certo numero, i migliori vengono consegnati a una libreria, la quale s'incarica di farli pittare e porli in vendita. […] Ma vi sono altri Atelier a Göttingen , a Carlsruhe [oggi Karlsruhe], a Parigi, etc., i quali avranno forse ordinamenti diversi.

Nel corso della sua relazione Veronese osserva pure:

Io credo che pel progresso sempre maggiore degli studj matematici in Italia, un Atelier come quello di Monaco sarebbe da noi di grande giovamento, perché le nostre scuole si renderebbero indipendenti anche per questo dall'Estero, e potrebbero procurarsi le loro collezioni con minor spese;

aggiungendo che

le Università di Roma, Torino, Pavia, Pisa spesero complessivamente 8 mila lire circa in modelli, però sono lontane dall'avere le raccolte complete, mentre tutte le altre Università e gli Istituti Superiori son del tutto sprovvisti.

I finanziamenti non si trovarono e l' "Atelier" non s'impiantò, pur trattandosi di un investimento economicamente di piccola entità. Le università italiane continuarono a "procurarsi" le loro collezioni, o singoli pezzi, all'estero.

Limitando le informazioni all'essenziale, si vuole ora dare un elenco delle sedi italiane visitate, rimandando alla bibliografia citata nelle note per maggiori informazioni intorno al lavoro svolto.

L'insieme delle sedi italiane, in effetti tutte quelle che erano da visitarsi, raggiunte da Franco Palladino, tra il 1992 e il 1997 circa, elencate andando da sud verso nord Italia, è il seguente:

Catania (Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Messina* (Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Bari* (Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Napoli* (Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" (Facoltà di Scienze MM. FF. NN.) e Facoltà di Agraria, *Roma*, (Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Firenze* (Dipartimento di Matematica "U. Dini", Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Bologna* (Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Modena* (Dipartimento di Matematica Pura e Applicata "G. Vitali", Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Padova* (Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Parma* (Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Pavia* (Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Milano* (Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Facoltà di Scienze MM. FF. NN.), *Torino* (Dipartimenti di Matematica della Facoltà di Scienze MM. FF. NN. e del Politecnico), *Genova* (Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM. FF. NN.).[61]

Il lavoro di rilievo fotografico (riproduzione di pezzo per pezzo del fondo di ciascuna sede) e di studio è confluito, nel caso dei fondi più significativi, in un'apposita, corrispondente pubblicazione a stampa.[62]

---

[61] All'Università di Pisa, nonostante l'attivo aiuto prestato dal prof. Luciano Modica e da altri professori, si è ritrovato soltanto l'*Inventario* –a firma del direttore di quello che era, allora, l'*Istituto di Matematica*, Leonida Tonelli (1885-1946)– riguardante i beni dell'*Istituto*, tra cui i modelli.

[62] Oltre ai lavori già citati nel corso di questo articolo, si segnalano:

F. Palladino, *Sui modelli matematici in gesso del Dipartimento di Matematica dell'Università di Messina*, «Rendiconti del Seminario di Matematica dell'Università di Messina», Serie II, vol. I (1991), pp. 151-158.

F. Palladino e G. Ferrarese, *Sulle collezioni di modelli matematici dei Dipartimenti di Matematica dell'Università e del Politecnico di Torino*, «Nuncius» (Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze), XIII (1998), pp. 169-185;

L. Carbone, G. Cardone e F. Palladino, *Le collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università "Federico II" di Napoli. Cataloghi ragionati*, «Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli», (IV), vol. LXV, anno CXXXVII (1998), pp. 93-257, con 115 foto di modelli e strumenti.

F. Palladino, *Le collezioni museali del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università di Napoli"Federico II"*, in *Atti del Convegno in onore di Carlo Ciliberto*, a cura di T. Bruno, P.

Con la compilazione della tesi di laurea (discussa a Dicembre 2000), Nicla Palladino ha composto il catalogo generale dei pezzi presenti (sono circa 350 distinti esemplari, alcuni dei quali hanno una presenza ripetuta in più sedi, quindi il numero complessivo è molto più alto) in tutti i "fondi" prima indicati, strutturandolo in forma ragionata con numerosi rimandi interni e quasi sempre con la fotografia del singolo oggetto. Di ciascun pezzo, o di gruppi degli stessi, è stata messo in rilievo il significato matematico. Il lavoro fatto è stato inserito in un *web-site* corredato dalle riproduzioni tridimensionali (*3D*) di una ventina di modelli realizzate mediante *Mathematica*®.[63]

Con la compilazione, poi, della tesi di dottorato (discussa nell'Autunno del 2004, al termine del ciclo quadriennale di studi, dal titolo *E-learning: Superfici matematiche in 3D*) di Nicla è stato mostrato il possibile uso dei modelli nell'insegnamento della geometria mediante *E-learning* e si è proceduto, con applicazione dell'informatica, alla rappresentazione approssimata di alcuni di essi mediante *nurbs*.

5. I modelli matematici plastici, in particolar modo quelli costruiti in gesso, oltre ad essere utili alle scienze matematiche, fornirono stimoli e ispirazioni a pittori, scultori, architetti e scenografi. Il professore Alfredo Franchetta, già ordinario di Geometria

---

Buonocore, L. Carbone e V. Esposito, Napoli, La Città del Sole, 1997, pp. 119-138, dove, sulla copertina del volume, vi è una bella foto della *Superficie diagonale di Clebsch* che è presso il Dipartimento napoletano.

F. Palladino, N. Palladino, *Sulle raccolte museali italiane di modelli per le matematiche superiori. Catalogo ragionato e sito web*, «Nuncius» (Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze), XVI (2001), pp. 781-790.

[63] Consultabile agli indirizzi: www.dmi.unisa.it/people/palladino/modelli; e www.dma.unina.it/~nicla.palladino/catalogo. La ricerca dei modelli può essere effettuata in base ai seguenti criteri: *Nome del modello*, *Nome della Serie*, *Numero della Serie*, *Numero del Modello*, *Catalogo*, *Etichetta originale*, *Materiale*, *Anno di edizione*, *Progettista*, *Realizzatore*, *Editore*, *Luogo di Costruzione*, *Note*, *Sede*.

all'Università di Napoli, laureatosi a Roma, dove ebbe come professore Federigo Enriques, interpellato, all'inizio dei passati anni Novanta, per informazioni su questi oggetti, ricordava che l'Enriques più volte gli aveva sottolineato che scenografi di *Cinecittà* (la "città del cinema" inaugurata a Roma nella primavera del 1937) si recavano spesso all'Istituto di Matematica dell'Università (oggi "La Sapienza") per osservare, onde trarre ispirazione, i modelli ivi custoditi.

Per il versante artistico alcuni elementi di documentazione si trovano nel volume di Luigi Campedelli dal titolo *Fantasia e logica della matematica*.[64] Il libro, a carattere divulgativo, contiene tavole illustrative di sculture in gesso di Alberto Viani (1906-1989) – ricordato, sotto l'angolazione che qui interessa, per la plasticità dei torsi femminili e maschili, per la scultura *La cariatide*, ecc.– e di un quadro di Atanasio Soldati (1896-1953) ispirati ai motivi geometrici espressi dai modelli in gesso.

Anche nel testo, di L. Campedelli, *Esercitazioni complementari di geometria*, curato da A. Barlotti (con la revisione della succitata C. Dolfi),[65] ad uso degli studenti universitari, vi sono alcune tavole illustrative (dalla VI alla XII) che raffigurano modelli: sono tutti in gesso e appartengono all'insieme di quelli riprodotti da Campedelli, di cui si è parlato, salvo il modello della tav. VI che rappresenta una falda della superficie razionale del quarto ordine, di equazione:

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2(z^2 - 1)=0,$$

"dono della Sig.na Dott. Anna Maria Sbrana" (recita l'etichetta ad esso incollata), probabilmente allieva di Campedelli; il modello è esposto ancora oggi a Firenze nelle vetrine che si trovano al Dipartimento di Matematica "U. Dini".

Nella recensione al testo di Gerd Fischer, redatta da Jeremy Gray,[66] sono riportate le foto di alcune sculture del "futurista" Umberto Boccioni (1882-1916) –si coglie l'occasione per segnalare che nel quadro da lui dipinto, *Visioni simultanee*, del 1911, sono

[64] Milano, Feltrinelli, 1966.
[65] Padova, CEDAM, 1975.
[66] Si veda *Mathematische Modelle/Mathematical Models (vol. 1-2) edited by Gerd Fischer, reviewed by Jeremy Gray*, «The mathematical Intelligencer», vol. 10, n. 3, 1988, pp. 64-69.

evocati tratti, dal colore viola sfumato, che sembrano ispirati, in fondo, dal modello di *Superficie di Riemann* con due falde semplicemente connesse[67]–, del "costruttivista" Naum Gabo (1890-1977) –noto anche per le sue sculture dalle forme geometriche costruite con materiali semitrasparenti–, e di Costantin Brancusi (1876-1957) che richiamano i modelli *Brill/Schilling*.

Un articolo, interessante, di Isabelle Fortuné[68] su Man Ray (1890-1976), noto anche per la sua dimensione artistica di "fotografo surrealista", permette di toccare altri punti riguardanti questo aspetto, poiché l'autrice parla della scoperta da questi fatta, in compagnia di Max Ernst (1891-1976), intorno al 1934, dei modelli in gesso (appartenenti al *Catalog Brill/Schilling*) esposti in vetrina all'*Institut Poincaré*, fondato a Parigi nel 1928.[69] Nell'articolo l'autrice evidenzia le artistiche fotografie fatte da Man Ray, ricorda ancora un *collage*, realizzato da Max Ernst per illustrare la cartolina-invito per una mostra di Man Ray (dal titolo *Man Ray, peintures et objets*, del 1935), che riproduceva, estratte dal *Katalog* curato dal Walther Dyck (e dal *Brill/Schilling*, va aggiunto), la *Superficie minimale di Enneper*,[70] una *Superficie di Riemann*, la *Superficie diagonale di Clebsch* con le sue ventisette rette reali, ecc., e ricorda che Ray dipinse, tra il 1948 e il 1954, a partire dalle fotografie fatte all'*Instiut Poincaré*, una serie di tavole raggruppate sotto il titolo di *Équations shakespeariane*. L'autrice cita, tra le forme che attrassero l'attenzione di Man Ray, anche il modello rappresentante la *Funzione amplitudine di Jacobi*

---

[67] *Zweiblättrige einfach zusammenhägende Riemann'sche Fläche*, *Catalog M. Schilling 1911*, Serie XVII, n. 10.

[68] Si veda *Man Ray et les objets mathématiques*, «Études photographiques», 1999, *http://etudesphotographiques.revues.org*

[69] Amministrativamente esso è oggi un' "École interne" dell'Université Paris VI "Pierre et Marie Curie".

[70] È una superficie minimale del nono ordine, costruita, in base ad un articolo di Alfred Enneper (1830-1885), del 1871, sotto la direzione di A. Brill. Essa è rappresentabile parametricamente da un'equazione algebrica e una copia del modello in gesso è, per esempio, a Napoli. "Un poco di questa superficie", se potesse passare l'espressione, sembra ritrovarsi nell'opera di Antoine Pevsner (1886-1962), fratello di Naum Gabo, dal titolo *Surface Développable*, del 1938-1939.

(una funzione ellittica),[71] esemplari della quale si trovano, per esempio, alle Università di Pavia, Roma ("La Sapienza") e Napoli: un modello in gesso che evoca un suolo, o una spiaggia, fatto di dune, profonde, armonicamente ondulate –come un pezzo della costa africana del Mediterraneo o come, sull'altra sponda, il litorale campano, da Pozzuoli a Baia Domizia, qual era fino agli anni Sessanta del Novecento–, da cui si erge una parte, scolpita, di quella che potrebbe essere, nella sua interezza, una Sfinge, per esempio.

Isabelle Fortuné interpreta, inoltre, l'attrazione verso questi modelli matematici plastici essere stata generata dal fatto che essi apparivano quali punti d'incontro delle due principali linee di tendenza che connotavano il surrealismo negli anni Trenta: le riflessioni sulla *nozione di oggetto* e, ancora, sulle *scoperte della scienza moderna*. Non si è invece completamente d'accordo con l'autrice, per le ragioni esposte nella parte iniziale di questo articolo, quando individua semplicemente nella "fragilité de ces constructions et leur caractère toujours trop approximatif pour la rigueur mathématiques" le cause della caduta dell'interesse scientifico, nei confronti dei modelli plastici, con la loro conseguente trasformazione, verso gli anni Trenta, in "objets de curiosité" o in oggetti destinati a dare al pubblico "une vision moins austère des recherches scientifiques". Intenzione, quest'ultima, che avrebbe poi mosso gli organizzatori dell'*Exposition internationale des arts et techniques dans la vie moderne*, allestita a Parigi, nel 1937, al *Palais de la Découverte* (appositamente creato, nell'occasione, utilizzando, allo scopo, anche una parte del *Grand Palais* costruito nel 1897 in funzione dell'*Exposition Universelle* del 1900) a mettere in mostra questi oggetti sotto il tema: *L'Art et la Science*.[72]

---

[71] Sul calco in gesso costituente il modello che sta a Pavia si legge a malapena l'incisione: $\varphi = am\ (u,k)$, mentre su quello che sta a Napoli si trova inciso $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, dove u è la funzione inversa della precedente ed esprime un integrale ellittico di prima specie.

[72] Su questa *Exposition* si vedano: il catalogo dal titolo *Exposition internationale*, Paris, Palais de la Découverte, 1937; e la pubblicazione *Paris*

Interessante e cospicuo è pure il lavoro svolto da Angela Vierling-Claassen sui *Models of Mathematical Surfaces*[73] dove in un *file* si tratta dell'argomento *Mathematical Models and Art in the Early 20th Century*.

Ancora uno scultore, attivo negli anni correnti, Cayetano Ramírez López, ha restaurato, nel 2005, quei modelli in gesso appartenenti al "fondo museale" del Dipartimento di Matematica dell'Università di Groningen, in Olanda; mentre un professore, Marius van der Put, s'incaricava di restaurare i modelli in filo.[74] È quanto emerge dalla tesi di dottorato di Irene Polo-Blanco (il cui titolo è *Theory and History of Geometric Models*),[75] che è rivolta, con molta cura anche per gli aspetti matematici che ne stanno alla base, alla presentazione dei più di cento modelli custoditi a Groningen. Sono modelli in gesso e filo risalenti, principalmente, alle serie VII, XIII, XVII, XXV del *Catalog* di M. Schilling, con in più i "Four-dimensional polytopes", costruiti per "visualizzare" la quarta dimensione, ideati da Alicia Boole Stott (1860-1940).[76] A questo proposito, un pezzo rappresentante un

---

1937. Cinquantenaire de l'Exposition internationale des arts et des techniques dans la vie moderne, Paris, Institut française d'architecture/Paris-Musées, 1987.

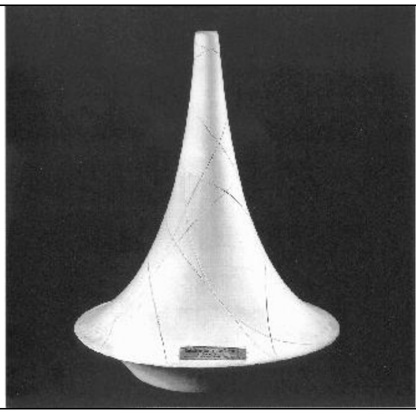
[73] Si veda il *web site*: http://math.harvard.edu, dove è citato anche il lavoro svolto da N. Palladino.

[74] Si coglie qui l'occasione per ricordare che al Dipartimento di Matematica dell'Università di Padova, nei trascorsi anni Ottanta, il professore Tomaso Millevoi s'incaricava, aiutato da alcuni studenti, di effettuare un'analoga operazione di restauro per i modelli in filo ivi esistenti. La constatazione fu fatta *in loco* da F. Palladino, osservando le nuove etichette poste sugli oggetti restaurati, e in seguito confermata da Francesco Bottacin, studente a Padova al tempo in cui Millevoi si prendeva cura dei modelli, poi professore all'Università di Salerno.

[75] Relatori i professori: M. van der Put, J. Top, J.A. van Maanen. La tesi, discussa nel 2007, è stata pubblicata a Groningen, per l'Academic Press Europe.

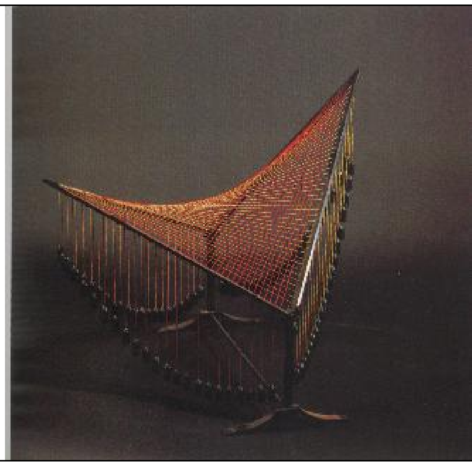
[76] Sui *politopi* si può vedere il contributo di H. Martini, *Reguläre Polytope und Verallgemeinerungen*, in O. Giering und J. Hoschek, *Geometrie und ihre Anwendungen*, München - Wien, C. Hanser Verlag, 1994, pp. 247-281, che è corredato, tra l'altro, da una vasta bibliografia.

Vierdimensionaler Würfel (un cubo a quattro dimensioni), costruito in sbarrette e archi metallici, si è ritrovato anche ad Heidelberg, nella recente, menzionata visita che si è effettuata.

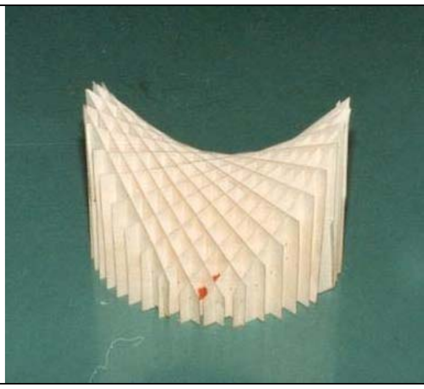


Superficie pseudosferica di tipo parabolico.

Superficie di Kuen.



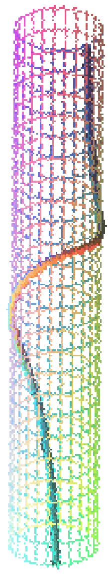
Paraboloide iperbolico con il sistema delle rette generatrici.



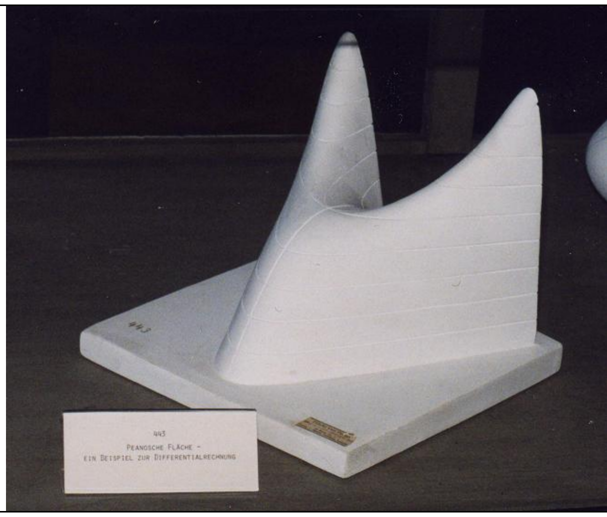
Paraboloide iperbolico.

Superficie di Riemann a 2 fogli.

Superficie di Boy.



Un modello originale di *horopter* (il profilo della curva, realizzata in filo di ottone, risalta perché più brillante) e, a destra, una riproduzione digitale della stessa.



Superficie di Peano.

Una vetrina di Modelli posseduti dal *Mathematisches Institut* della *Ruprecht-Karl-Universität* di Heidelberg. Si noti nella penultima posizione (in basso a destra) il cubo a 4 dimensioni.

Cubo a 4 dimensioni.